DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

GOTTINGAE
TYPIS DIETERICHIANIS.
MDCCCXXVIII.

DISQUISITIONES GENERALES
CIRCA
SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. 8. OCTOB. 1827.

1.

Disquisitiones, in quibus de directionibus variarum rectarum in spatio agitur, plerumque ad maius perspicuitatis et simplicitatis fastigium euehuntur, in auxilium vocando superficiem sphaericam radio $= 1$ circa centrum arbitrarium descriptam, cuius singula puncta repraesentare censebuntur directiones rectarum radiis ad illa terminatis parallelarum. Dum situs omnium punctorum in spatio per tres coordinatas determinatur, puta per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus, ante omnia considerandae veniunt directiones axium his planis normalium: puncta superficiei sphaericae, quae has directiones repraesentant, per (1), (2), (3) denotabimus; mutua igitur horum distantia erit quadrans. Ceterum axium directiones versus eas partes acceptas supponemus, versus quas coordinatae respondentes crescunt.

2.

Haud inutile erit, quasdam propositiones, quae in huiusmodi quaestionibus vsum frequentem offerunt, hic in conspectum producere.

I. Angulus inter duas rectas se secantes mensuratur per arcum inter puncta, quae in superficie sphaerica illarum directionibus respondent.

II. Situs cuiuslibet plani repraesentari potest per circulum maximum in superficie sphaerica, cuius planum illi est parallelum.

III. Angulus inter duo plana aequalis est angulo sphaerico inter circulos maximos illa repraesentantes, et proin etiam per arcum inter horum circulorum maximorum polos interceptum mensuratur. Et perinde inclinatio rectae ad planum mensuratur per arcum, a puncto, quod respondet directioni rectae, ad circulum maximum, qui plani situm repraesentat, normaliter ductum.

IV. Denotantibus x, y, z; x', y', z' coordinatas duorum punctorum, r eorundem distantiam, atque L punctum, quod in superficie sphaerica repraesentat directionem rectae a puncto priori ad posterius ductae, erit

$$x' = x + r \cos (1) L$$
$$y' = y + r \cos (2) L$$
$$z' = z + r \cos (3) L$$

V. Hinc facile sequitur, haberi generaliter

$$\cos(1) L^2 + \cos(2) L^2 + \cos(3) L^2 = 1$$

nec non, denotante L' quodcunque aliud punctum superficiei sphaericae, esse

$$\cos (1) L . \cos(1) L' + \cos(2) L . \cos(2) L' + \cos(3) L . \cos(3) L' = \cos LL'.$$

VI. Theorema. *Denotantibus L, L', L'', L''' quatuor puncta in superficie sphaerae, atque A angulum, quem arcus LL', $L''L'''$ in puncto concursus sui formant, erit*

$$\cos LL'' . \cos L'L''' - \cos LL''' . \cos L'L'' = \sin LL' . \sin L''L''' . \cos A$$

Demonstratio. Denotet litera A insuper punctum concursus ipsum, statuaturque

$$AL = t,\ AL' = t',\ AL'' = t'',\ AL''' = t'''$$

Habemus itaque:

$$\cos LL'' = \cos t . \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A$$
$$\cos L'L''' = \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A$$
$$\cos LL''' = \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A$$
$$\cos L'L'' = \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A$$

et proin

$$\cos LL'' . \cos L'L''' - \cos LL''' . \cos L'L'' = \cos A (\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''')$$
$$= \cos A (\cos t \sin t' - \sin t \cos t') (\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \sin t''')$$
$$= \cos A . \sin(t' - t) . \sin(t''' - t'')$$
$$= \cos A . \sin LL' . \sin L''L'''$$

Ceterum quum inde a puncto A bini rami vtriusque circuli maximi proficiscantur, duo quidem ibi anguli formantur, quorum alter alterius complementum ad 180°: sed analysis nostra monstrat, eos ramos adoptandos esse, quorum directiones cum sensu progressionis a puncto L ad L', et a puncto L'' ad L''' consentiunt: quibus intellectis simul patet, quum circuli maximi duobus punctis concurrant, arbitrarium esse, vtrum eligatur. Loco anguli A etiam arcus inter polos circulorum maximorum, quorum partes sunt arcus LL', $L''L'''$, adhiberi potest: manifesto autem polos tales accipere oportet, qui respectu horum arcuum similiter iacent, puta vel vterque polus ad dextram iacens, dum a L versus L' atque ab L'' versus L''' procedimus, vel vterque ad laeuam.

VII. Sint L, L', L'' tria puncta in superficie sphaerica, statuamusque breuitatis caussa

$$\cos(1)L = x,\ \cos(2)L = y,\ \cos(3)L = z$$
$$\cos(1)L' = x',\ \cos(2)L' = y',\ \cos(3)L' = z'$$
$$\cos(1)L'' = x'',\ \cos(2)L'' = y'',\ \cos(3)L'' = z''$$

nec non

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta$$

Designet λ polum circuli maximi, cuius pars est arcus LL', et quidem eum, qui respectu huius arcus similiter iacet, ac punctum (1) respectu arcus (2) (3). Tunc erit, ex theoremate praecedente, $yz'-y'z = \cos(1)\lambda . \sin(2)(3) . \sin LL'$, siue, propter $(2)(3) = 90°$,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda . \sin LL', \text{ et perinde}$$
$$zx' - z'x = \cos(2)\lambda . \sin LL'$$
$$xy' - x'y = \cos(3)\lambda . \sin LL'$$

Multiplicando has aequationes resp. per x'', y'', z'' et addendo, obtinemus adiumento theorematis secundi in *V* prolati

$$\Delta = \cos \lambda L'' . \sin LL'$$

Iam tres casus sunt distinguendi. *Primo*, quoties L'' iacet in eodem circulo maximo cuius pars est arcus LL', erit $\lambda L'' = 90°$, adeoque $\Delta = 0$. Quoties vero L'' iacet extra circulum illum maximum, aderit casus *secundus*, si est ab eadem parte, a qua est λ, *tertius*, si ab opposita: in his casibus puncta L, L', L'' formabunt triangulum sphaericum, et quidem iacebunt in casu secundo eodem ordine quo puncta (1), (2), (3), in casu tertio vero ordine opposito. Denotando angulos illius trianguli simpliciter per L, L', L'', atque perpendiculum in superficie sphaerica a puncto L'' ad latus LL' ductum per p, erit $\sin p = \sin L . \sin LL'' = \sin L' . \sin L'L''$, atque $\lambda L'' = 90° \mp p$, valente signo superiori pro casu secundo, inferiori pro tertio. Hinc itaque colligimus

$$\pm \Delta = \sin L . \sin LL' . \sin LL'' = \sin L' . \sin LL' . \sin L'L$$
$$= \sin L'' . \sin LL'' . \sin L'L''$$

Ceterum manifesto casus primus in secundo vel tertio comprehendi censeri potest, nulloque negotio perspicitur, $\pm \Delta$ exhibere sextuplum soliditatis pyramidis inter puncta L, L', L'' atque centrum sphaerae formatae. Denique hinc facillime colligitur, eandem expressionem $\pm \frac{1}{6} \Delta$ generaliter exprimere soliditatem cuiusuis pyramidis inter initium coordinatarum atque puncta quorum coordinatae sunt x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', contentae.

3.

Superficies curua apud punctum A in ipsa situm curuatura continua gaudere dicitur, si directiones omnium rectarum ab A ad omnia puncta superficiei ab A infinite parum distantia ductarum infinite parum ab vno eodemque plano per A transiente deflectuntur: hoc planum superficiem curuam in puncto A *tangere* dicitur. Quodsi huic conditioni in aliquo puncto satisfieri nequit, continuitas curuaturae hic interrumpitur, vti e. g. euenit in cuspide coni. Disquisitiones praesentes ad tales superficies curuas, vel ad tales superficiei partes, restringentur, in quibus continuitas curuaturae nullibi interrumpitur. Hic tantummodo obseruamus, methodos, quae positioni plani tangentis determinandae inseruiunt, pro punctis singularibus, in quibus continuitas curuaturae interrumpitur, vim suam perdere, et ad indeterminata perducere debere.

4.

Situs plani tangentis commodissime e situ rectae ipsi in puncto A normalis cognoscitur, quae etiam ipsi superficiei curuae normalis dicitur. Directionem huius normalis per punctum L in superficie sphaerae auxiliaris repraesentabimus, atque statuemus

$$\cos(1)L = X,\ \cos(2)L = Y,\ \cos(3)L = Z;$$

coordinatas puncti A per x, y, z denotamus. Sint porro $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ coordinatae alius puncti in superficie curua A'; ds ipsius distantia infinite parua ab A; denique λ punctum superficiei sphaericae repraesentans directionem elementi AA'. Erit itaque

$$dx = ds.\cos(1)\lambda,\ dy = ds.\cos(2)\lambda,\ dz = ds.\cos(3)\lambda$$

et, quum esse debeat $\lambda L = 90°$,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0$$

E combinatione harum aequationum deriuamus

$$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0.$$

Duae habentur methodi generales ad exhibendam indolem superficiei curuae. Methodus *prima* vtitur aequatione inter coordinatas x, y, z, quam reductam esse supponemus ad formum $W = 0$, vbi W erit functio indeterminataram x, y, z. Sit differentiale completum functionis W

$$\mathrm{d}W = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

eritque in superficie curua

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

et proin

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0$$

Quum haec aequatio, perinde vt ea quam supra stabiliuimus, valere debeat pro directionibus omnium elementorum $\mathrm{d}s$ in superficie curua, facile perspiciemus, X, Y, Z proportionales esse debere ipsis P, Q, R, et proin, quum fiat $XX + YY + ZZ = 1$, erit vel

$$X = \frac{P}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},\quad Y = \frac{Q}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},$$
$$Z = \frac{R}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}$$

vel

$$X = \frac{-P}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},\quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},$$
$$Z = \frac{-R}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}$$

Methodus *secunda* sistit coordinatas in forma functionum duarum variabilium p, q. Supponamus per differentiationem harum functionum prodire

$$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}p + a'\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}y = b\mathrm{d}p + b'\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}z = c\mathrm{d}p + c'\mathrm{d}q$$

quibus valoribus in formula supra data substitutis, obtinemus

$$(aX + bY + cZ)\,\mathrm{d}p + (a'X + b'Y + c'Z)\,\mathrm{d}q = 0$$

Quum haec aequatio locum habere debeat independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, manifesto esse debebit

$$aX + bY + cZ = 0,\ a'X + b'Y + c'Z = 0$$

vnde colligimus, X, Y, Z proportionales esse debere quantitatibus

$$bc' - cb',\ ca' - ac',\ ab' - ba'.$$

Statuendo itaque breuitatis caussa

$$\sqrt{((bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2)} = \Delta$$

erit vel

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta},\ Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta},\ Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta}$$

vel

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta},\ Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta},\ Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}$$

His duabus methodis generalibus accedit *tertia*, vbi vna coordinatarum, e. g. z exhibetur in forma functionis reliquarum x, y: haec methodus manifesto nihil aliud est, nisi casus specialis vel methodi primae, vel secundae. Quodsi hic statuitur

$$\mathrm{d}z = t\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

erit vel

$$X = \frac{-t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Y = \frac{-u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Z = \frac{1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

vel

$$X = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Y = \frac{u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Z = \frac{-1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

5.

Duae solutiones in art. praec. inuentae manifesto ad puncta superficiei sphaericae opposita, siue ad directiones oppositas referuntur, quod cum rei natura quadrat, quum normalem ad vtramuis plagam superficiei curuae ducere liceat. Quodsi duas plagas, superficiei contiguas, inter se distinguere, alteramque exteriorem alteram interiorem vocare placet, etiam vtrique normali suam solutionem rite tribuere licebit adiumento theorematis in art. 2 (VII) euoluti, simulatque criterium stabilitum est ad plagam alteram ab altera distinguendam.

In methodo prima tale criterium petendum erit a signo valoris quantitatis W. Scilicet generaliter loquendo superficies curua eas spatii partes, in quibus W valorem positiuum obtinet, ab iis dirimet, in quibus valor ipsius W fit negatiuus. E theoremate illo vero facile colligitur, si W valorem positiuum obtineat versus plagam exteriorem, normalisque extrorsum ducta concipiatur, solutionem priorem adoptandam esse. Ceterum in quouis casu facile diiudicabitur, vtrum per superficiem integram eadem regula respectu signi ipsius W valeat, an pro diuersis partibus diuersae: quamdiu coëfficientes P, Q, R valores finitos habent, nec simul omnes tres euanescunt, lex continuitatis vicissitudinem vetabit.

Si methodum secundam sequimur, in superficie curua duo systemata linearum curuarum concipere possumus, alterum, pro quo p est variabilis, q constans; alterum, pro quo q variabilis, p constans: situs mutuus harum linearum respectu plagae exterioris decidere debet, vtram salutionem adoptare oporteat. Scilicet quoties tres lineae, puta ramus lineae prioris systematis a puncto A proficiscens crescente p, ramus posterioris systematis a puncto A egrediens crescente q, atque normalis versus plagam exteriorem ducta *similiter* iacent, vt, inde ab origine abscissarum, axes ipsarum x, y, z resp. (e. g. si tum e tribus lineis illis, tum e tribus his, prima sinistrorsum, secunda dextrorsum, tertia sursum directa concipi potest), solutio prima adoptari debet; quoties autem situs mutuus trium linearum priorum oppositus est situi mutuo axium ipsarum x, y, z, solutio secunda valebit.

In methodo tertia dispiciendum est, vtrum, dum z incrementum positiuum accipit, manentibus x et y inuariatis, transitus fiat versus plagam exteriorem an interiorem. In casu priori, pro normali extrorsum directa, solutio prima valet, in posteriori secunda.

6.

Sicuti, per translatam directionem normalis in superficiem curuam ad superficiem sphaerae, cuiuis puncto determinato prioris superficiei respondet punctum determinatum in posteriori, ita etiam quaeuis linea, vel quaeuis figura in illa repraesentabitur per lineam vel figuram correspondentem in hac. In comparatione duarum figurarum hoc modo sibi mutuo correspondentium, quarum altera quasi imago alterius erit, duo momenta sunt respicienda, alterum, quatenus sola quantitas consideratur, alterum, quatenus abstrahendo a relationibus quantitatiuis solum situm contemplamur.

Momentum primum basis erit quarundam notionum, quas in doctrinam de superficiebus curuis recipere vtile videtur. Scilicet cuilibet parti superficiei curuae limitibus determinatis cinctae *curvaturam totalem* seu *integram* adscribimus, quae per aream figurae illi in superficie sphaerica respondentem exprimetur. Ab hac curuatura integra probe distinguenda est curuatura quasi specifica, quam nos *mensuram curuaturae* vocabimus: haec posterior ad *punctum* superficiei refertur, et denotabit quotientem qui oritur, dum curuatura integra elementi superficialis puncto adiacentis per aream ipsius elementi diuiditur, et proin indicat rationem arearum infinite paruarum in superficie curua et in superficie sphaerica sibi mutuo respondentium. Vtilitas harum innouationum per ea, quae in posterum a nobis explicabuntur, abunde, vt speramus, sancietur. Quod vero attinet ad terminologiam, imprimis prospiciendum esse duximus, vt omnis ambiguitas arceatur, quapropter haud congruum putauimus, analogiam terminologiae in doctrina de lineis curuis planis vulgo receptam (etsi non omnibus probatam) stricte sequi, secundum quam mensura curuaturae simpliciter audire debuisset curuatura, curuatura integra autem amplitudo. Sed quidni in verbis faciles esse liceret, dummodo res non sint inanes, neque dictio interpretationi erroneae obnoxia?

Situs figurae in superficie sphaerica vel similis esse potest situi figurae respondentis in superficie curua, vel oppositus (inuersus); casus prior locum habet, vbi binae lineae in superficie curua ab eodem puncto directionibus inaequalibus sed non oppositis proficiscentes repraesentantur in superficie sphaerica per lineas similiter iacentes, puta vbi imago lineae ad dextram iacentis ipsa est ad dextram; casus posterior, vbi contrarium valet. Hos duos casus per *signum* mensurae curuaturae vel positiuum vel negatiuum distinguemus. Sed manifesto haec distinctio eatenus tantum locum habere potest, quatenus in vtraque superficie plagam determinatam eligimus, iu qua figura concipi debet. In sphaera auxiliari semper plagam exteriorem, a centro auersam, adhibebimus: in superficie curva etiam plaga exterior siue quae tamquam exterior consideratur, adoptari potest, vel potius plaga eadem, a qua normalis erecta concipitur; manifesto enim respectu similitudinis figurarum nihil mutatur, si in superficie curua tum figura ad plagam oppositam transfertur, tum normalis, dummodo ipsius imago semper in eadem plaga superficiei sphaericae depingatur.

Signum positiuum vel negatiuum, quod pro situ figurae infinite paruae *mensurae* curuaturae adscribimus, etiam ad curuaturam integram figurae finitae in superficie curua extendimus. Attamen si argumentum omni generalitate amplecti suscipimus, quaedam dilucidationes requiruntur, quas hic breuiter tantum attingemus. Quamdiu figura in superficie curua ita comparata est, vt singulis punctis intra ipsam puncta *diuersa* in superficie sphaerica respondeant, definitio vlteriori explicatione non indiget. Quoties autem conditio ista locum non habet, necesse erit, quasdam partes figurae in superficie sphaerica bis vel pluries in computum ducere, vnde, pro situ simili vel opposito, vel accumulatio vel destructio oriri poterit. Simplicissimum erit in tali casu, figuram in superficie curua in partes tales diuisam concipere, quae singulae per se spectatae conditioni illi satisfaciant, singulis tribuere curuaturam suam integram, quantitate per aream figurae in superficie sphaerica respondentis, signo per situm determinatis, ac denique figurae toti adscribere curuaturam integram ortam per additionem curuaturarum integrarum, quae singulis partibus respondent. Generaliter itaque curuatura integra figurae est $= \int k \, \mathrm{d}\sigma$, denotante $\mathrm{d}\sigma$ elementum areae figurae, k mensuram curuaturae in quouis puncto. Quod vero attinet ad repraesentationem geometricam huius integralis, praecipua huius rei momenta ad sequentia redeunt. Peripheriae figurae in superficie curua (sub restrictione art. 3) semper respondebit in superficie sphaerica linea in se ipsam rediens. Quae si se ipsam nullibi intersecat, totam superficiem sphaericam in duas partes dirimet, quarum altera respondebit figurae in superficie curua, et cuius area, positiue vel negatiue accipienda, prout respectu peripheriae suae similiter iacet vt figura in superficie curua respectu suae, vel inuerse, exhibebit posterioris curuaturam integram. Quoties vero linea ista se ipsam semel vel pluries secat, exhibebit figuram complicatam, cui tamen area certa aeque legitime tribui potest, ac figuris absque nodis, haecque area, rite intellecta, semper valorem iustum curuaturae integrae exhibebit. Attamen vberiorem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.

7.

Inuestigemus iam formulam ad exprimendam mensuram curuaturae pro quouis puncto superficiei curuae. Denotante $\mathrm{d}\sigma$ aream elementi huius superficiei, $Z\mathrm{d}\sigma$ erit area proiectionis huius elementi in planum coordinatarum x, y; et perinde, si $\mathrm{d}\Sigma$ est area elementi respondentis in superficie sphaerica, erit $Z \mathrm{d}\Sigma$ area proiectionis ad idem planum: signum positiuum vel negatiuum ipsius Z vero indicabit situm proiectionis similem vel oppositum situi elementi proiecti: manifesto itaque illae proiectiones eandem rationem quoad quantitatem, simulque eandem relationem quoad situm, inter se tenent, vt elementa ipsa. Consideremus iam elementum triangulare in superficie curua, supponamusque coordinatas trium punctorum, quae formant ipsius proiectionem, esse

$$\begin{array}{l} x, \quad y \\ x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y \\ x + \delta y, y + \delta y \end{array}$$

Duplex area huius trianguli exprimetur per formulam

$$\mathrm{d}x \,.\, \delta y - \mathrm{d}y \,.\, \delta x$$

et quidem in forma positiua vel negatiua, prout situs lateris a puncto primo ad tertium respectu lateris a puncto primo ad secundum similis vel oppositus est situi axis coordinatarum y respectu axis coordinatarum x.

Perinde si coordinatae trium punctorum, quae formant proiectionem elementi respondentis in superficie sphaerica, a centro sphaerae inchoatae, sunt

$$\begin{array}{l} X, \quad Y \\ X + \mathrm{d}X, Y + \mathrm{d}Y \\ X + \delta X, Y + \delta Y \end{array}$$

duplex area huius proiectionis exprimetur per

$$\mathrm{d}X \,.\, \delta Y - \mathrm{d}Y \,.\, \delta X$$

de cuius expressionis signo eadem valent quae supra. Quocirca mensura curuaturae in hoc loco superficiei curuae erit

$$k = \frac{\mathrm{d}X \,.\, \delta Y - \mathrm{d}Y \,.\, \delta X}{\mathrm{d}x \,.\, \delta y - \mathrm{d}y \,.\, \delta x}$$

Quodsi iam supponimus, indolem superficiei curuae datam esse secundum modum tertium in art. 4 consideratum, habebuntur X et Y in forma functionum quantitatum x, y, vnde erit

$$\mathrm{d}X = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$\delta X = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\delta y$$

$$\mathrm{d}Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$\delta Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\delta y$$

Substitutis his valoribus, expressio praecedens transit in hanc:

$$k = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)$$

Statuendo vt supra

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u$$

atque insuper

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} = T,\ \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = U,\ \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} = V$$

siue $\mathrm{d}t = T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$

habemus ex formulis supra datis

$$X = -tZ,\ T = -uZ,\ (1 + tt + uu)ZZ = 1$$

atque hinc

$$\mathrm{d}X = -Z\mathrm{d}t - t\mathrm{d}Z$$
$$\mathrm{d}Y = -Z\mathrm{d}u - u\mathrm{d}Z$$
$$(1 + tt + uu)\mathrm{d}Z + Z(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u) = 0$$

siue

$$\mathrm{d}Z = -Z^3(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u)$$
$$\mathrm{d}X = -Z^3(1 + uu)\mathrm{d}t + Z^3tu\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}Y = -Z^3tu\mathrm{d}t - Z^3(1 + tt)\mathrm{d}u$$

adeoque

$$\frac{dX}{dx} = Z^3(-(1+uu)T + tuU)$$
$$\frac{dX}{dy} = Z^3(-(1+uu)U + tuV)$$
$$\frac{dY}{dx} = Z^3(tuT - (1+tt)U)$$
$$\frac{dY}{dy} = Z^3(tuU - (1+tt)V)$$

quibus valoribus in expressione praecedente substitutis, prodit

$$k = Z^6(TV - UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV - UU)$$
$$= \frac{TV - UU}{(1+tt+uu)^2}$$

8.

Per idoneam electionem initii et axium coordinatarum facile effici potest, vt pro puncto determinato A valores quantitatum t, u, U euanescant. Scilicet duae priores conditiones iam adimplentur, si planum tangens in hoc puncto pro plano coordinatarum x, y adoptatur. Quarum initium si insuper in puncto A ipso collocatur, manifesto expressio coordinatarum z adipiscitur formam talem

$$z = \tfrac{1}{2}T^\circ xx + U^\circ xy + \tfrac{1}{2}V^\circ yy + \Omega$$

vbi Ω erit ordinis altioris quam secundi. Mutando dein situm axium ipsarum x, y angulo M tali vt habeatur

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U^\circ}{T^\circ - V^\circ}$$

facile perspicitur, prodituram esse aequationem huius formae

$$z = \tfrac{1}{2}Txx + \tfrac{1}{2}Vyy + \Omega$$

quo pacto etiam tertiae conditioni satisfactum est. Quibus ita factis, patet

I. Si superficies curua secetur plano ipsi normali et per axem coordinatarum x transeunte, oriri curuam planam, cuius radius curuaturae in puncto A fiat $= \frac{1}{T}$, signo positiuo vel negatiuo indicante concauitatem vel conuexitatem versus plagam eam, versus quam coordinatae z sunt positiuae.

II. Simili modo $\frac{1}{V}$ erit in puncto A radius curuaturae curvae planae, quae oritur per sectionem superficiei curuae cum plano per axes ipsarum y, z transeunte.

III. Statuendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, fit

$$z = \tfrac{1}{2}(T\cos\varphi^2 + V\sin\varphi^2)\,rr + \Omega$$

vnde colligitur, si sectio fiat per planum superficiei in A normale et cum axe ipsarum x angulum φ efficiens, oriri curuam planam, cuius radius curuaturae in puncto A sit

$$= \frac{1}{T\cos\varphi^2 + V\sin\varphi^2}$$

IV. Quoties itaque habetur $T = V$, radii curuaturae in *cunctis* planis normalibus aequales erunt. Si vero T et V sunt inaequales, manifestum est, quum $T\cos\varphi^2 + V\sin\varphi^2$ pro quouis valore anguli φ cadat intra T et V, radios curuaturae in sectionibus principalibus, in I et II consideratis, referri ad curuaturas extremas, puta alterum ad curuaturam maximam, alterum ad minimam, si T et V eodem signo affectae sint, contra alterum ad maximam conuexitatem, alterum ad maximam concauitatem, si T et V signis oppositis gaudeant. Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curuatura superficierum curuarum primus docuit.

V. Mensura curuaturae superficiei curuae in puncto A autem nanciscitur expressionem simplicissimam $k = TV$, vnde habemus

Theorema. *Mensura curuaturae in quouis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator vnitas, denominator au-*

tem productum duorum radiorum curuaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.

Simul patet, mensuram curuaturae fieri positiuam pro superficiebus concauo-concauis vel conuexo-conuexis (quod discrimen non est essentiale), negatiuam vero pro concauo-conuexis. Si superficies constat e partibus vtriusque generis, in earum confiniis mensura curuaturae euanescens esse debebit. De indole superficierum curuarum talium, in quibus mensura curuaturae vbique euanescit, infra pluribus agetur.

9.

Formula generalis pro mensura curuaturae in fine art. 7 proposita, omnium simplicissima est, quippe quae quinque tantum elementa implicat; ad magis complicatam, scilicet nouem elementa inuoluentem, deferimur, si adhibere volumus modum primum indolem superficiei curuae exprimendi. Retinendo notationes art. 4. insuper statuemus:

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x^2} = P', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y^2} = Q', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}z^2} = R'$$

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y.\mathrm{d}z} = P'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}z} = Q'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = R''$$

ita vt fiat

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P &= P'\mathrm{d}x + R''\mathrm{d}y + Q''\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}Q &= R''\mathrm{d}x + Q'\mathrm{d}y + P''\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}R &= Q''\mathrm{d}x + P''\mathrm{d}y + R'\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Iam quum habeatur $t = -\frac{P}{R}$, inuenimus per differentiationem

$$RR\mathrm{d}t = -R\mathrm{d}P + P\mathrm{d}R = (PQ'' - RP')\mathrm{d}x + (PP'' - RR'')\mathrm{d}y + (PR' - RQ'')\mathrm{d}z,$$

siue, eliminata $\mathrm{d}z$ adiumento aequationis $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$,

$$R^3\,dt = (-RRP' + 2PRQ'' - PPR')\,dx + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\,dy.$$

Prorsus simile modo obtinemus

$$R^3\,du = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\,dx + (-RRQ' + 2QRP'' - QQR')\,dy$$

Hinc itaque colligimus

$$R^3\,T = -RRP' + 2PRQ'' - PPR'$$
$$R^3\,U = PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR''$$
$$R^3\,V = -RRQ' + 2QRP'' - QQR'$$

Substituendo hos valores in formula art. 7, obtinemus pro mensura curuaturae k expressionem symmetricam sequentem:

$$(PP + QQ + RR)^2\,k =$$
$$PP(Q'R' - P''P'') + QQ(P'R' - Q''Q'') + RR(P'Q' - R''R'')$$
$$+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'')$$

10.

Formulam adhuc magis complicatam, puta e quindecim elementis conflatam, obtinemus, si methodum generalem secundam, indolem superficierum curuarum exprimendi, sequimur. Magni tamen momenti est, hanc quoque elaborare. Retinendo signa art. 4, insuper statuemus

$$\frac{ddx}{dp^2} = \alpha,\quad \frac{ddx}{dp.dq} = \alpha',\quad \frac{ddx}{dq^2} = \alpha''$$
$$\frac{ddy}{dp^2} = \beta,\quad \frac{ddy}{dp.dq} = \beta',\quad \frac{ddy}{dq^2} = \beta''$$
$$\frac{ddz}{dp^2} = \gamma,\quad \frac{ddz}{dp.dq} = \gamma',\quad \frac{ddz}{dq^2} = \gamma''$$

Praeterea breuitatis caussa faciemus

$$bc' - cb' = A$$
$$ca' - ac' = B$$
$$ab' - ba' = C$$

Primo obseruamus, haberi $A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}z = 0$, siue $\mathrm{d}z = -\frac{A}{C}\,\mathrm{d}x - \frac{B}{C}\,\mathrm{d}y$; quatenus itaque z spectatur tamquam functio ipsarum x, y, fit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t = -\frac{A}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u = -\frac{B}{C}$$

Porro deducimus, ex $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q$,

$$C\,\mathrm{d}p = b'\,\mathrm{d}x - a'\,\mathrm{d}y$$

$$C\,\mathrm{d}q = -b\,\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y$$

Hinc obtinemus differentialia completa ipsarum t, u

$$C^3\,\mathrm{d}t = \left(A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\right)(b'\,\mathrm{d}x - a'\,\mathrm{d}y) + \left(C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} - A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}\right)(b\,\mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}y)$$

$$C^3\,\mathrm{d}u = \left(B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p}\right)(b'\,\mathrm{d}x - a'\,\mathrm{d}y) + \left(C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} - B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}\right)(b\,\mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}y$$

Iam si in his formulis substituimus

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma'$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha'$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

atque perpendimus, valores differentialium $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}u$ sic prodeuntium, aequales esse debere, independenter a differentialibus $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, quantitatibus $T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y$, $U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$ resp. inueniemus, post quasdam transformationes satis obuias

$$\begin{aligned}
C^3 T = {} & \alpha A b'b' + \beta B b'b' + \gamma C b'b' \\
& - 2\alpha' A b b' - 2\beta' B b b' - 2\gamma' C b b' \\
& + \alpha'' A b b + \beta'' B b b + \gamma'' C b b \\
C^3 U = {} & - \alpha A a' b' - \beta B a' b' - \gamma C a' b' \\
& + \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\
& - \alpha'' A a b - \beta'' B a b - \gamma'' C a b \\
C^3 V = {} & \alpha A a' a' + \beta B a' a' + \gamma C a' a' \\
& - 2\alpha' A a a' - 2\beta' B a a' - 2\gamma' C a a' \\
& + \alpha'' A a a + \beta'' B a a + \gamma'' C a a
\end{aligned}$$

Si itaque breuitatis caussa statuimus

$$\begin{aligned}
A\alpha + B\beta + C\gamma &= D \;\ldots\ldots\ldots (1) \\
A\alpha' + B\beta' + C\gamma' &= D' \;\ldots\ldots (2) \\
A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' &= D'' \;\ldots\ldots (3)
\end{aligned}$$

fit

$$\begin{aligned}
C^3 T &= D b'b' - 2D' b b' + D'' b b \\
C^3 U &= - D a' b' + D'(ab' + ba') - D'' a b \\
C^3 V &= D a' a' - 2D' a a' + D'' a a
\end{aligned}$$

Hinc inuenimus, euolutione facta,

$$C^6 (TV - UU) = (DD'' - D'D')(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'D')CC$$

et proin formulam pro mensura curuaturae

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}$$

11.

Formulae modo inuentae iam aliam superstruemus, quae inter fertilissima theoremata in doctrina de superficiebus curuis referenda est. Introducamus sequentes notationes:

$$aa + bb + cc = E$$
$$aa' + bb' + cc' = F$$
$$a'a' + b'b' + c'c' = G$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = m \ldots\ldots (4)$$
$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m' \ldots\ldots (5)$$
$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'' \ldots\ldots (6)$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n \ldots\ldots (7)$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n' \ldots\ldots (8)$$
$$a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'' \ldots\ldots (9)$$
$$AA + BB + CC = EG - FF = \Delta$$

Eliminemus ex aequationibus 1, 4, 7, quantitates β, γ, quod fit multiplicando illas per $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$, et addendo: ita oritur

$$(A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha$$
$$= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC)$$

quam aequationem facile transformamus in hanc:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE)$$

Simili modo eliminatio quantitatum α, γ vel α, β ex iisdem aequationibus suppeditat

$$BD = \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE)$$
$$CD = \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE)$$

Multiplicando has tres aequationes per α'', β'', γ'' et addendo obtinemus

$$DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE) \ldots (10)$$

Si perinde tractamus aequationes 2, 5, 8, prodit

$$AD' = \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E)$$
$$BD' = \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E)$$
$$CD' = \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E)$$

quibus aequationibus per α', β', γ' multiplicatis, additio suppeditat:

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E)$$

Combinatio huius aequationis cum aequatione (10) producit

$$DD'' - D'D' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma')\Delta$$
$$+ E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'm' - mm'')$$

Iam patet esse $\frac{dE}{dp} = 2m$, $\frac{dE}{dq} = 2m'$, $\frac{dF}{dp} = m' + n$, $\frac{dF}{dq} = m'' + n$,

$$\frac{dG}{dp} = 2n', \quad \frac{dG}{dq} = 2n'', \text{ siue}$$

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad m' = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad m'' = \frac{dF}{dq} - \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}$$

$$n = \frac{dF}{dq} - \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad n' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \quad n'' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq}$$

Porro facile corfirmatur, haberi

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddE}{dq^2} + \frac{ddF}{dp.dq} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddG}{dp^2}$$

Quodsi iam has expressiones diuersas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, peruenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus F, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$4(EG - FF)^2 k = E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)$$
$$+ F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq}\right.$$
$$\left. + 4\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right)$$
$$+ G\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\cdot\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)$$

$$- 2\,(EG - FF)\left(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} - 2\,\frac{\mathrm{dd}F}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\right)$$

12.

Quum indefinite habeatur

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2,$$

patet, $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$ esse expressionem generalem elementi linearis in superficie curua. Docet itaque analysis in art. praec. explicata, ad inueniendam mensuram curuaturae haud opus esse formulis finitis, quae coordinatas x, y, z tamquam functiones indeterminatarum p, q exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusuis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius grauissimi theorematis.

Supponamus superficiem nostram curuam explicari posse in aliam superficiem, curuam seu planam, ita vt cuiuis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, vnde pro elemento $\sqrt{(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2)}$ prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p^2 + 2F'\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G'\mathrm{d}q^2)}$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in vtraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E',\ F = F',\ G = G'.$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

Theorema. *Si superficies curua in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curuaturae in singulis punctis inuariata manet.*

Manifesto quoque *quaeuis pars finita superficiei curuae post explicationem in aliam superficiem eandem curuaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus inuestigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curuaturae in quouis puncto fieri $= 0$, quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, vbique erit

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}y}\right)^2 = 0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

13.

Quae in art. praec. exposuimus, cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris diligenter excolatur. Scilicet quatenus superficies consideratur non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cuius dimensio vna pro euanescente habetur, flexile quidem, sed non extensibile, qualitates superficiei partim a forma pendent, in quam illa reducta concipitur, partim absolutae sunt, atque inuariatae manent, in quamcunque formam illa flectatur. Ad has posteriores, quarum inuestigatio campum geometriae nouum fertilemque aperit, referendae sunt mensura curuaturae atque curuatura integra eo sensu, quo hae expressiones a nobis accipiuntur; porro huc pertinet doctrina de lineis breuissimis, pluraque alia, de quibus in posterum agere nobis reseruamus. In hoc considerationis modo superficies plana atque superficies in planum explicabilis, e. g. cylindrica, conica etc. tamquam essentialiter identicae spectantur, modusque genuinus indolem superficiei ita consideratae generaliter exprimendi semper innititur formulae $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$, quae nexum elemeuti cum duabus indeterminatis p, q sistit. Sed antequam hoc argumentum vlterius prosequamur, principia theoriae linearum breuissimarum in superficie curua data praemittere oportet.

14.

Indoles lineae curuae in spatio generaliter ita datur, vt coordinatae x, y, z singulis illius punctis respondentes exhibeantur in forma functionum vnius variabilis, quam per w denotabimus. Longitudo talis lineae a puncto initiali arbitrario vsque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z, exprimitur per integrale

$$\int \mathrm{d}w \,.\, \sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2\right)}$$

Si supponimus, situm lineae curuae variationem infinite paruam pati, ita vt coordinatae singulorum punctorum accipiant variationes δx, δy, δz, variatio totius longitudinis inuenitur

$$= \int \frac{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}y \,.\, \mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z \,.\, \mathrm{d}\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}}$$

quam expressionem in hanc formam transmutamus:

$$\frac{\mathrm{d}x \,.\, \delta x + \mathrm{d}y \,.\, \delta y + \mathrm{d}z \,.\, \delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}} - \int \Bigg(\delta x \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z^2)}}$$

$$+ \delta y \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}} + \delta z \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}}\Bigg)$$

In casu eo, vbi linea est breuissima inter puncta sua extrema, constat, ea, quae hic sub signo integrali sunt, euanescere debere. Quatenus linea esse debet in superficie data, cuius indoles exprimitur per aequationem $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$, etiam variationes δx, δy, δz satisfacere debent aequationi $P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$, vnde per principia nota facile colligitur, differentialia

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

resp. quantitatibus P, Q, R proportionalia esse debere. Iam sit $\mathrm{d}r$ elementum lineae curuae, λ punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem huius elementi, L punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem normalis in superficiem curuam; denique sint ξ, η, ζ coordinatae puncti λ, atque X, Y, Z coordinatae puncti L respectu centri sphaerae. Ita erit

$$\mathrm{d}x = \xi\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}y = \eta\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}z = \zeta\mathrm{d}r$$

vnde colligimus, differentialia illa fieri $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$. Et quum quantitates P, Q, R proportionales sint ipsis X, Y, Z, character lineae breuissimae consistit in aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{X} = \frac{\mathrm{d}\eta}{Y} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{Z}$$

Ceterum facile perspicitur, $\sqrt{(\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2)}$ aequari arculo in superficie sphaerica, qui mensurat angulum inter directiones tangentium in initio et fine elementi $\mathrm{d}r$, adeoque esse $= \frac{\mathrm{d}r}{\varrho}$ si ϱ denotet radium curuaturae in hoc loco curuae breuissimae; ita fiet

$$\varrho\mathrm{d}\xi = X\mathrm{d}r,\ \varrho\mathrm{d}\eta = Y\mathrm{d}r,\ \varrho\mathrm{d}\zeta = Z\mathrm{d}r$$

15.

Supponamus, in superficie curua a puncto dato A proficisci innumeras curuas breuissimas, quas inter se distinguemus per angulum, quem constituit singularum elementum primum cum elemento primo vnius ex his lineis pro prima assumtae: sit φ ille angulus, vel generalius functio illius anguli, nec non r longitudo talis lineae breuissimae a puncto A vsque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z. Quum itaque valoribus determinatis variabilium r, φ respondeant puncta determinata superficiei, coordinatae x, y, z considerari possunt tamquam functiones ipsarum r, φ. Notationes λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z in eadem significatione retinebimus, in qua in art. praec. acceptae fuerunt, modo indefinite ad punctum indefinitum cuiuslibet linearum breuissimarum referantur.

Lineae breuissimae omnes, quae sunt aequalis longitudinis r, terminabuntur ad aliam lineam, cuius longitudinem ab initio arbitrario numeratam denotamus per v. Considerari poterit itaque v tamquam functio indeterminatarum r, φ, et si per λ' designamus punctum in superficie sphaerica respondens directioni elementi dv, nec non per ξ', η', ζ' coordinatas huius puncti respectu centri sphaerae, habebimus:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \eta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \zeta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}$$

Hinc et ex

$$\frac{dx}{dr} = \xi, \quad \frac{dy}{dr} = \eta, \quad \frac{dz}{dr} = \zeta$$

sequitur

$$\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dr}\cdot\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dr}\cdot\frac{dz}{d\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\cdot\frac{dv}{d\varphi} = \cos\lambda\lambda'\cdot\frac{dv}{d\varphi}$$

Membrum primum huius aequationis, quod etiam erit functio ipsarum r, φ, per S denotamus; cuius differentiatio secundum r suppeditat:

$$\frac{dS}{dr} = \frac{ddx}{dr^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi} + \frac{ddy}{dr^2}\cdot\frac{dy}{d\varphi} + \frac{ddz}{dr^2}\cdot\frac{dz}{d\varphi}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d\left(\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right)}{d\varphi}$$
$$= \frac{d\xi}{dr}\cdot\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d\eta}{dr}\cdot\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dr}\cdot\frac{dz}{d\varphi} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}{d\varphi}$$

Sed $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$, adeoque ipsius differentiale $= 0$; et per art, praec. habemus, si etiam hic ρ denotat radium curuaturae in linea r,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\varrho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\varrho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\varrho}$$

Ita obtinemus

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\varrho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi} = 0$$

quoniam manifesto λ' iacet in circulo maximo, cuius polus L. Hinc itaque concludimus, S independentem esse ab r et proin functionem solius φ. At pro $r = 0$ manifesto fit $v = 0$, et proin etiam $\frac{dv}{d\varphi} = 0$, nec non $S = 0$ independenter a φ. Necessario itaque generaliter esse debebit $S = 0$, adeoque $\cos \lambda\lambda' = 0$, i. e. $\lambda\lambda' = 90°$. Hinc colligimus

THEOREMA. *Ductis in superficie curua ab eodem puncto initiali innumeris lineis breuissimis aequalis longitudinis, linea earum extremitates iungens ad illas singulas erit normalis.*

Operae pretium esse duximus, hoc theorema e proprietate fundamentali linearum breuissimarum deducere: ceterum eius veritas etiam absque calculo per sequens ratiocinium intelligi potest. Sint AB, AB' duae lineae breuissimae eiusdem longitudinis, angulum infinite paruum ad A includentes, supponamusque, alterutrum angulorum elementi BB' cum lineis BA, $B'A$ differre quantitate finita ab angulo recto, vnde per legem continuitatis alter maior alter minor erit angulo recto. Supponamus, angulum ad B esse $= 90° - \omega$, capiamusque in linea BA punctum C ita vt sit $BC = BB' . \operatorname{cosec} \omega$: hinc quum triangulum infinite paruum $BB'C$ tamquam planum tractare liceat, erit $CB' = BC . \cos \omega$, et proin $AC + CB' = AC + BC . \cos \omega = AB - BC . (1 - \cos\omega) = AB' - BC(1 - \cos\omega)$, i. e. transitus a puncto A ad B' per punctum C breuior linea breuissima, $Q . E . A.$

16.

Theoremati art. praec. associamus aliud, quod ita enunciamus. *Si in superficie curua concipitur linea qualiscunque, a cuius punctis singulis proficiscantur sub angulis rectis et versus eandem plagam innumerae lineae breuissimae aequalis longitudinis, curua, quae earum extremitates alteras iungit, illas singulas sub angulis rectis secabit.* Ad demonstrationem nihil in analysi praecedente mutandum est, nisi quod φ designare debet longitudinem curuae *datae* inde a puncto arbitrario numeratam, aut si mauis functionem huius longitudinis; ita omnia ratiocinia etiamnum valebunt, ea modificatione, quod veritas aequationis $S = 0$ pro $r = 0$ nunc iam in ipsa hypothesi implicatur. Ceterum hoc alterum theorema generalius est praecedente, quod adeo in illo comprehendi censeri potest, dum pro linea data adoptamus circulum infinite paruum circa centrum A descriptum. Denique monemus, hic quoque considerationes geometricas analyseos vice fungi posse, quibus tamen quum satis obuiae sint hic non immoramur.

17.

Reuertimur ad formulam $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$, quae indefinite magnitudinem elementi linearis in superficie curua exprimit, atque ante omnia significationem geometricam coëfficientium E, F, G examinamus. Iam in art. 5 monuimus, in superficie curua concipi posse duo systemata linearum, alterum, in quibus singulis sola p sit variabilis, q constans; alterum, in quibus sola q variabilis, p constans. Quodlibet punctum superficiei considerari potest tamquam intersectio lineae primi systematis cum linea secundi: tuncque elementum lineae primae huic puncto adiacens et variationi $\mathrm{d}p$ respondens erit $= \sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p$, nec non elementum lineae secundae respondens variationi $\mathrm{d}q$ erit $= \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q$; denique denotando per ω angulum inter haec elementa, facile perspicitur fieri $\cos\omega$

$= \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Area autem elementi parallelogrammatici in superficie curua inter duas lineas primi systematis, quibus respondent $q, q + \mathrm{d}q$, atque duas lineas systematis secundi quibus respondent $p, p + \mathrm{d}p$, erit $\sqrt{(EG - FF)}\, \mathrm{d}p . \mathrm{d}q$.

Linea quaecunque in superficie curua ad neutrum illorum systematum pertinens, oritur, dum p et q concipiuntur esse functiones vnius variabilis nouae, vel altera illarum functio alterius. Sit s longitudo talis curuae ab initio arbitrario numerata et versus directionem vtramuis pro positiua habita. Denotemus per θ angulum, quem efficit elementum $\mathrm{d}s = \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p . \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$ cum linea primi systematis per initium elementi ducta, et quidem ne vlla ambiguitas remaneat, hunc angulum semper ab eo ramo illius lineae, in quo valores ipsius p crescunt, inchoari, et versus eam plagam positiue accipi supponemus, versus quam valores ipsius q crescunt. His ita intellectis facile perspicitur haberi

$$\cos\theta . \mathrm{d}s = \sqrt{E} . \mathrm{d}p + \sqrt{G} . \cos\omega . \mathrm{d}q = \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\theta . \mathrm{d}s = \sqrt{G} . \sin\omega . \mathrm{d}q = \frac{\sqrt{(EG - FF)} . \mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

18.

Inuestigabimus nunc, quaenam sit conditio, vt haec linea sit breuissima. Quum ipsius longitudo s expressa sit per integrale

$$s = \int \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p . \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$$

conditio minimi requirit, vt variatio huius integralis a mutatione infinite parua tractus lineae oriunda fiat $= 0$. Calculus ad propositum nostrum in hoc casu commodius absoluitur, si p tamquam functionem ipsius q consideramus. Quo pacto, si variatio per characteristicam δ denotatur, habemus

$$\delta s = \int \frac{\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}q^2\right)\delta p + (2E\mathrm{d}p + 2F\mathrm{d}q)\mathrm{d}\delta p}{2\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}.\delta p + \int \delta p.\left(\frac{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2}{2\mathrm{d}s} - \mathrm{d}.\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)$$

constatque, quae hic sunt sub signo integrali, independenter a δp euanescere debere. Fit itaque

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2 = 2\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$$

$$= 2\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\sqrt{E}.\cos\theta = \frac{\mathrm{d}s.\mathrm{d}E.\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2\mathrm{d}s.\mathrm{d}\theta.\sqrt{E}.\sin\theta$$

$$= \frac{(E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q)\,\mathrm{d}E}{E} - \sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{E}\right).\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q\right) - 2\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

Hinc itaque nanciscimur aequationem conditionalem pro linea breuissima sequentem:

$$\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p + \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

quam etiam ita scribere licet

$$\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\mathrm{d}E + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Ceterum adiumento aequationis

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E}{\sqrt{(EG - FF)}}.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + \frac{F}{\sqrt{(EG - FF)}}$$

ex illa aequatione angulus θ eliminari, atque sic aequatio differentio-differentialis inter p et q euolui potest, quae tamen magis complicata, et ad applicationes minus vtilis euaderet, quam praecedens.

19.

Formulae generales, quas pro mensura curuaturae et pro variatione directionis lineae breuissimae in artt. 11, 18 eruimus, multo simpliciores fiunt, si quantitates p, q ita sunt electae, vt lineae primi systematis lineas secundi systematis vbique orthogonaliter secent, i. e. vt generaliter habeatur $\omega = 90^\circ$, siue $F = 0$. Tunc scilicet fit, pro mensura curuaturae,

$$4EEGGk = E.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + E\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2 + G.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} + G\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\right)^2 - 2EG\left(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\right),$$

et pro variatione anguli θ

$$\sqrt{EG}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Inter varios casus, in quibus haec conditio orthogonalitatis valet, primarium locum tenet is, vbi lineae omnes alterutrius systematis, e. g. primi, sunt lineae breuissimae. Hic itaque pro valore constante ipsius q, angulus θ fit $= 0$, vnde aequatio pro variatione anguli θ modo tradita docet, fieri debere $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 0$, siue coëfficientem E a q independentem, i. e. E esse debet vel constans vel functio solius p. Simplicissimum erit, pro p adoptare longitudinem ipsam cuiusque lineae primi systematis, et quidem, quoties omnes lineae primi systematis in vno puncto concurrunt, ab hoc puncto numeratam, vel, si communis intersectio non adest, a qualibet linea secundi systematis. Quibus ita intellectis patet, p et q iam eadem denotare, quae in artt. 15, 16 per r et φ expresseramus, atque

E

fieri $E = 1$. Ita duae formulae praecedentes iam transeunt in has:

$$4GGk = \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2 - 2\,G\,\frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}$$

$$\sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}\theta = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\cdot\mathrm{d}q$$

vel statuendo $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\mathrm{dd}m}{\mathrm{d}p^2},\quad \mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}\,.\,\mathrm{d}q$$

Generaliter loquendo m erit functio ipsarum p, q atque $m\,\mathrm{d}q$ expressio elementi cuiusuis lineae secundi systematis. In casu speciali autem, vbi omnes lineae p ab eodem puncto proficiscuntur, manifesto pro $p = 0$ esse debet $m = 0$; porro si in hoc casu pro q adoptamus angulum ipsum, quem elementum primum cuiusuis lineae primi systematis facit cum elemento alicuius ex ipsis ad arbitrium electae, quum pro valore infinite paruo ipsius p, elementum lineae secundi systematis (quae considerari potest tamquam circulus radio p descriptus), sit $= p\,\mathrm{d}q$, erit pro valore infinite paruo ipsius p, $m = p$, adeoque, pro $p = 0$ simul $m = 0$ et $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} = 1$.

20.

Immoremur adhuc iidem suppositioni, puta p designare indefinite longitudinem lineae breuissimae a puncto determinato A ad punctum quodlibet superficiei ductum, atque q angulum, quem primum elementum huius lineae efficit cum elemento primo alicuius lineae breuissimae ex A proficiscentis datae. Sit B punctum determinatum in hac linea pro qua $q = 0$, atque C aliud punctum determinatum superficiei, pro quo valorem ipsius q simpliciter per A designabimus. Supponamus, puncta B, C per lineam breuissimam iuncta, cuius partes, inde a puncto B numeratas, indefinite vt in art. 18 per s denotabimus, nec non perinde vt illic, per θ angulum, quem quoduis elementum ds facit cum elemento dp: denique sint $\theta°$, θ' valores anguli θ in punctis B, C. Habemus itaque in superficie curua triangulum lineis breuissimis inclusum, eiusque anguli ad B et C, per has ipsas literas simpliciter designandi aequales erunt ille complemento anguli $\theta°$ ad 180°, hic ipsi angulo θ'. Sed quum analysin nostram inspicienti facile pateat, omnes angulos non per gradus sed per numeros expressos concipi, ita vt angulus 57° 17′ 45″, cui respondet arcus radio aequalis, pro vnitate habeatur, statuere oportet, denotando per 2π peripheriam circuli

$$\theta° = \pi - B,\ \theta' = C$$

Inquiramus nunc in curuaturam integram huius trianguli, quae fit $= \int k\, d\sigma$, denotante $d\sigma$ elementum superficiale trianguli; quare quum hoc elementum exprimatur per $m\, dp\,.\, dq$, eruere oportet integrale $\int\int k m\, dp\,.\, dq$ supra totam trianguli superficiem. Incipiamus ab integratione secundum p, quae propter $k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{ddm}{dp^2}$, suppeditat $dq.$ (Const. $- \frac{dm}{dp}$), pro curuatura integra areae iacentis inter lineas primi systematis quibus respondent valores indeterminatae secundae q, $q + dq$: quum haec curuatura pro $p = 0$ euanescere debeat, quantitas constans per integrationem introducta aequalis esse debet valori ipsius $\frac{dm}{dp}$ pro $p = 0$, i. e. vnitati. Habemus itaque $dq\ (1 - \frac{dm}{dp})$, vbi pro $\frac{dm}{dp}$ accipere oportet valorem respondentem fini illius areae in linea CB. In hac linea vero fit per art. praec. $\frac{dm}{dp}\,.\, dq = -d\theta$, vnde expressio nostra mutatur in $dq + d\theta$. Accedente iam integratione altera a $q = 0$ vsque ad $q = A$ extendenda, obtinemus curuaturam integram trianguli $= A + \theta' - \theta°$ $= A + B + C - \pi$.

Curuatura integra aequalis est areae eius partis superficiei sphaericae, quae respondet triangulo, signo positiuo vel negatiuo affectae, prout superficies curua, in qua triangulum iacet, est concauo-concaua vel concauo-conuexa: pro vnitate areae accipiendum est quadratum, cuius latus est vnitas (radius sphaerae), quo pacto superficies tota sphaerae fit $= 4\pi$. Est itaque pars superficiei sphaericae triangulo respondens ad sphaerae superficiem integram vt $\pm (A + B + C - \pi)$ ad 4π. Hoc theorema, quod ni fallimur ad elegantissima in theoria superficierum curuarum referendum esse videtur, etiam sequenti modo enunciari potest:

Excessus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-concaua formati vltra 180°, vel defectus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-conuexa formati a 180° mensuratur per aream partis superficiei sphaericae, quae illi triangulo per directiones normalium respondet, si superficies integra 720 gradibus aequiparatur.

Generalius in quouis polygono n laterum, quae singula formantur per lineas breuissimas, excessus summae angulorum supra $2n-4$ rectos, vel defectus a $2n-4$ rectis (pro indole curuaturae superficiei), aequatur areae polygoni respondentis in superficie sphaerica, dum tota superficies sphaerae 720 gradibus aequiparatur, vti per discerptionem polygoni in triangula e theoremate praecedente sponte demanat.

21.

Restituamus characteribus p, q, E, F, G, ω significationes generales, quibus supra accepti fuerant, supponamusque, indolem superficiei curuae praeterea alio simili modo per duas alias variabiles p', q' determinari, vbi elementum lineare indefinitum exprimatur per

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p'^2 + 2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q' + G'\mathrm{d}q'^2)}$$

Ita cuiuis puncto superficiei per valores determinatos variabilium p, q definito respondebunt valores determinati variabilium p', q', quocirca hae erunt functiones ipsarum p, q, e quarum differentiatione prodire supponemus

$$\mathrm{d}p' = \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q$$

Iam proponimus nobis inuestigare significationem geometricam horum coëfficientium α, β, γ, δ.

Quatuor itaque nunc systemata linearum in superficie curua concipi possunt, pro quibus resp. q, p, q', p' sint constantes. Si per punctum determinatum, cui respondent variabilium valores p, q, p', q', quatuor lineas ad singula illa systemata pertinentes ductas supponimus, harum elementa, variationibus positiuis $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$, respondentes erunt

$$\surd E.\mathrm{d}p,\quad \surd G.\mathrm{d}q,\quad \surd E'.\mathrm{d}q',\quad \surd G'.\mathrm{d}q'.$$

Angulos, quos horum elementorum directiones faciunt cum directione fixa arbitraria, denotabimus per M, N, M', N', numerando eo sensu, quo iacet secunda respectu primae, ita vt $\sin(N - M)$ fiat quantitas positiua: eodem sensu iacere supponemus (quod licet) quartam respectu tertiae, ita vt etiam $\sin(N' - M')$ sit quantitas positiua. His ita intellectis, si consideramus punctum aliud, a priori infinite parum distans, cui respondeant valores variabilium $p + \mathrm{d}p$, $q + \mathrm{d}q$, $p' + \mathrm{d}p'$, $q' + \mathrm{d}q'$, leui attentione adhibita cognoscemus, fieri generaliter, i. e. independenter a valoribus variationum $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$,

$$\surd E.\mathrm{d}p.\sin M + \surd G.\mathrm{d}q.\sin N = \surd E'.\mathrm{d}p'.\sin M' + \surd G'.\mathrm{d}q'.\sin N'$$

quum vtraque expressio nihil aliud sit, nisi distantia puncti noui a linea, a qua anguli directionum incipiunt. Sed habemus, per notationem iam supra introductam $N - M = \omega$, et per analogiam statuemus $N' - M' = \omega'$, nec non insuper $N - M' = \psi$. Ita aequatio modo inuenta exhiberi potest in forma sequente

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p\,.\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q\,.\sin(M'+\psi)$$
$$=\sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}p'\,.\sin M'+\sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'\sin(M'+\omega')$$

vel ita

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p.\sin(N'-\omega-\omega')+\psi)+\sqrt{G}.\mathrm{d}q.\sin(N'-\omega'+\psi)$$
$$=\sqrt{E'}.\mathrm{d}p'\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}.\mathrm{d}q'\sin N'$$

Et quum aequatio manifesto independens esse debeat a directione initiali, hanc ad lubitum accipere licet. Statuendo itaque in forma secunda $N'=0$, vel in prima $M'=0$, obtinemus aequationes sequentes:

$$\sqrt{E'}\,.\sin\omega'\,.\,\mathrm{d}p'=\sqrt{E}.\sin(\omega+\omega'-\psi).\mathrm{d}p+\sqrt{G}.\sin(\omega'-\psi).\mathrm{d}q$$
$$\sqrt{G'}\,.\sin\omega'.\,\mathrm{d}q'=\sqrt{E'}\,.\sin(\psi-\omega).\mathrm{d}p+\sqrt{G}\,.\sin\psi\,.\,\mathrm{d}q$$

quae aequationes quum identicae esse debeant cum his

$$\mathrm{d}p'=\alpha\,\mathrm{d}p+\beta\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q'=\gamma\,\mathrm{d}p+\delta\,\mathrm{d}q$$

suppeditabunt determinationem coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Erit scilicet

$$\alpha=\sqrt{\frac{E}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'},\quad \beta=\sqrt{\frac{G}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'}$$
$$\gamma=\sqrt{\frac{E}{G'}}\cdot\frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'},\quad \delta=\sqrt{\frac{G}{G'}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}$$

Adiungi debent aequationes $\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}$, $\cos\omega'=\frac{F'}{\sqrt{E'G'}}$, $\sin\omega=\sqrt{\frac{EG-FF}{EG}}$, $\sin\omega'=\sqrt{\frac{E'G'-F'F'}{E'G'}}$, vnde quatuor aequationes ita quoque exhiberi possunt

$$\alpha\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{EG'}\,.\sin(\omega+\omega'-\psi)$$
$$\beta\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{GG'}\,.\sin(\omega'-\psi)$$
$$\gamma\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{EE'}\,.\sin(\psi-\omega)$$
$$\delta\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{GE'}\,.\sin\psi$$

Quum per substitutiones $\mathrm{d}p'=\alpha\,\mathrm{d}p+\beta\,\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}q'=\gamma\,\mathrm{d}p+\delta\,\mathrm{d}q$

trinomium $E'dp'^2 + 2F'dp'.dq' + G'dq'^2$ transire debeat in $Edp^2 + 2Fdp.dq + Gdq^2$, facile obtinemus

$$EG - FF = (E'G' - F'F')(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

et quum vice versa trinomium posterius rursus transire debeat in prius per substitutionum

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\,dp = \delta dp' - \beta dq',\ (\alpha\delta - \beta\gamma)\,dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

inuenimus

$$E\delta\delta - 2F\gamma\delta + G\gamma\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot E'$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot F'$$

$$E\beta\beta - 2F\alpha\beta + G\alpha\alpha = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot G'$$

22.

A disquisitione generali art. praec. descendimus ad applicationem latissime patentem, vbi, dum p et q etiamnum significatione generalissimà accipiuntur, pro p', q', adoptamus quantitates in art. 15 per r, φ denotatas, quibus characteribus etiam hic vtemur, scilicet vt pro quouis puncto superficiei r sit distantia minima a puncto determinato, atque φ angulus in hoc puncto inter elementum primum ipsius r atque directionem fixam. Ita habemus $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90°$: statuemus insuper $\sqrt{G'} = m$, ita vt elementum lineare quodcunque fiat $= \sqrt{(dr^2 + mm\,d\varphi^2)}$. Hinc quatuor aequationes in art. praec pro α, β, γ, δ, erutae, suppeditant:

$$\sqrt{E}.\cos(\omega - \psi) = \frac{dr}{dp} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sqrt{G}.\cos\psi = \frac{dr}{dq} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\sqrt{E}.\sin(\psi - \omega) = m.\frac{d\varphi}{dp} \ldots\ldots (3)$$

$$\sqrt{G}\,.\sin\psi = m\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} \,\ldots\ldots\ldots \;(4)$$

Vltima et penultima vero has

$$EG - FF = E\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 - 2F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} + G\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 \ldots \;(5)$$

$$\left(E.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} = \left(F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - G.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \ldots \;(6)$$

Ex his aequationibus petenda est determinatio quantitatum r, φ, ψ et (si opus videatur) m, per p et q: scilicet integratio aequationis (5) dabit r, qua inuenta integratio aequationis (6) dabit φ, atque alterutra aequationum (1), (2) ipsam ψ: denique m habebitur per alterutram aequationum (3), (4).

Integratio generalis aequationum (5), (6) necessario duas functiones arbitrarias introducere debet, quae quid sibi velint facile intelligemus, si perpendimus, illas aequationes ad casum eum quem hic consideramus non limitari, sed perinde valere, si r et φ accipiantur in significatione generaliori art. 16, ita vt sit r longitudo lineae breuissimae ad lineam arbitrariam determinatam normaliter ductae, atque φ functio arbitraria longitudinis eius partis lineae, quae inter lineam breuissimam indefinitam et punctum arbitrarium determinatum intercipitur. Solutio itaque generalis haec omnia indefinite amplecti debet, functionesque arbitrariae tunc demum in definitas abibunt, quando linea illa arbitraria atque functio partium quam φ exhibere debet, praescriptae sunt. In casu nostro circulus infinite paruus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae r numerantur, et φ denotabit partes huius circuli ipsas per radium diuisas, vnde facile colligitur, aequationes (5), (6) pro casu nostro complete sufficere, dummodo ea, quae indefinita relinquunt, ei conditioni accommodentur, vt r et φ pro puncto illo initiali atque punctis ab eo infinite parum distantibus quadrent.

Ceterum quod attinet ad integrationem ipsam aequationum (5), (6), constat, eam reduci posse ad integrationem aequationum differentialium vulgarium, quae tamen plerumque tam intricatae euadunt, vt parum lucri inde redundet. Contra euolutio in series, quae ad vsus practicos, quoties de partibus superficiei modicis agitur, abunde sufficiunt, nullis difficultatibus obnoxia est, atque sic formulae allatae fontem vberem aperiunt, ad multa problemata grauissima soluenda. Hoc vero loco exemplum vnicum ad methodi indolem monstrandam euoluemus.

23.

Considerabimus casum eum, vbi omnes lineae, pro quibus p constans est, sunt lineae breuissimae orthogonaliter secantes lineam pro qua $\varphi = 0$, et quam tamquam lineam abscissarum contemplari possumus. Sit A punctum pro quo $r = 0$, D punctum indefinitum in linea abscissarum, $AD = p$, B punctum indefinitum in linea breuissima ipsi AD in D normali, atque $BD = q$, ita vt p considerari possit tamquam abscissa, q tamquam ordinata puncti B; abscissas positiuas assumimus in eo ramo lineae abscissarum, cui respondet $\varphi = 0$, dum r semper tamquam quantitatem positiuam spectamus; ordinatas positiuas statuimus in plaga ea, vbi φ numeratur inter 0 et 180°.

Per theorema art. 16 habebimus $\omega = 90°$, $F = 0$, nec non $G = 1$; statuemus insuper $\sqrt{E} = n$. Erit itaque n functio ipsarum p, q, et quidem talis, quae pro $q = 0$ fieri debet $= 1$. Applicatio formulae in art. 18 allatae ad casum nostrum docet, in quauis linea breuissima esse debere $\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p$, denotante θ angulum inter elementum huius lineae atque elementum lineae pro qua q constans: iam quum linea abscissarum ipsa sit breuissima, atque pro ea vbique $\theta = 0$, patet, pro $q = 0$ vbique fieri debere $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} = 0$.

Hinc igitur colligimus, si n in seriem secundum potestates ipsius q progredientem euoluatur, hanc habere debere formam sequentem

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + \text{etc.}$$

vbi f, g, h etc. erunt functiones ipsius p, et quidem statuemus

$$f = f^\circ + f'p + f''pp + \text{etc.}$$
$$g = g^\circ + g'p + g''pp + \text{etc.}$$
$$h = h^\circ + h'p + h''pp + \text{etc.}$$

etc. siue

$$\begin{aligned} n = 1 + f^\circ qq + f'pqq &+ f''ppqq + \text{etc.} \\ + g^\circ q^3 &+ g'pq^3 + \text{etc.} \\ &+ h^\circ q^4 + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

24.

Aequationes art. 22 in casu nostro suppeditant

$$n \sin\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p},\quad \cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q},\quad -n\cos\psi = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q},\quad \sin\psi = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$nn = nn\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2,\quad nn.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

Adiumento harum aequationum, quarum quinta et sexta iam in reliquis continentur, series euolui poterunt pro r, φ, ψ, m, vel pro quibuslibet functionibus harum quantitatum, e quibus eas, quae imprimis attentione sunt dignae, hic sistemus.

Quum pro valoribus infinite paruis ipsarum p, q fieri debeat $rr = pp + qq$, series pro rr incipiet a terminis $pp + qq$: terminos altiorum ordinum obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum *) adiumento aequationis

$$\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}\right)^2 = 4rr.$$

*) Calculum, qui per nonnulla artificia paullulum contrahi potest, hic adscribere superfluum duximus.

scilicet

$$[1]\quad rr = pp + \tfrac{2}{3}f^\circ ppqq + \tfrac{1}{2}f' p^3 qq + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^\circ f^\circ)p^4 qq \text{ etc.}$$
$$+ qq \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}g^\circ ppq^3 + \tfrac{2}{5}g' p^3 q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h^\circ - \tfrac{7}{45}f^\circ f^\circ)ppq^4$$

Dein habemus, ducente formula $r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}$,

$$[2]\quad r\sin\psi = p - \tfrac{1}{3}f^\circ pqq - \tfrac{1}{4}f' ppqq - (\tfrac{1}{5}f'' + \tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)p^3 qq \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}g^\circ pq^3 - \tfrac{2}{5}g' ppq^3$$
$$- (\tfrac{3}{5}h^\circ - \tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)pq^4$$

nec non per formulam $r\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}$

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f^\circ ppq + \tfrac{1}{2}f' p^3 q + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^\circ f^\circ)p^4 q \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{3}{4}g^\circ ppqq + \tfrac{3}{5}g' p^3 qq$$
$$+ (\tfrac{4}{5}h^\circ - \tfrac{14}{45}f^\circ f^\circ)ppq^3$$

Hinc simul innotescit angulus ψ. Perinde ad computum anguli φ concinnius euoluuntur series pro $r\cos\varphi$ atque $r\sin\varphi$, quibus inseruiunt aequationes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} = n\cos\varphi.\sin\psi - r\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = \cos\varphi.\cos\psi - r\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} = n\sin\varphi.\sin\psi + r\cos\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = \sin\varphi.\cos\psi + r\cos\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$n\cos\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

quarum combinatio suppeditat

$$\frac{r\sin\psi}{n}.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = r\cos\varphi$$

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q}=r\sin\varphi$$

Hinc facile euoluuntur series pro $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, quarum termini primi manifesto esse debent p et q, puta

$$[4]\quad r\cos\varphi=p+\tfrac{2}{3}f^\circ pqq+\tfrac{5}{12}f'ppqq+(\tfrac{3}{10}f''-\tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)p^3qq \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}g^\circ pq^3+\tfrac{7}{20}g'ppq^3$$
$$+(\tfrac{2}{5}h^\circ-\tfrac{7}{45}f^\circ f^\circ)pq^4$$

$$[5]\quad r\sin\varphi=q-\tfrac{1}{3}f^\circ ppq-\tfrac{1}{6}f'p^3q-(\tfrac{1}{10}f''-\tfrac{7}{90}f^\circ f^\circ)p^4q \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{4}g^\circ ppqq-\tfrac{3}{20}g'p^3qq$$
$$-(\tfrac{1}{5}h^\circ+\tfrac{13}{90}f^\circ f^\circ)ppq^3$$

E combinatione aequationum [2], [3], [4], [5] deriuari posset series pro $rr\cos(\psi+\varphi)$, atque hinc, diuidendo per seriem [1], series pro $\cos(\psi+\varphi)$, a qua ad seriem pro ipso angulo $\psi+\varphi$ descendere liceret. Elegantius tamen eadem obtinetur sequenti modo. Differentiando aequationem primam et secundam ex iis, quae initio huius art. allatae sunt, obtinemus

$$\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}+n\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q}+\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q}=0$$

qua combinata cum hac

$$n\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}+\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}=0$$

prodit

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}+\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}q}=0$$

Ex hac aequatione adiumento methodi coëfficientium indeterminatorum facile eliciemus seriem pro $\psi+\varphi$, si perpendimus ipsius terminum primum esse debere $\frac{1}{2}\pi$, radio pro vnitate accepto, atque denotante 2π peripheriam circuli,

$$[6]\quad \psi+\varphi=\tfrac{1}{2}\pi-f^\circ pq-\tfrac{2}{3}f'ppq-(\tfrac{1}{2}f''-\tfrac{1}{6}f^\circ f^\circ)p^3q \text{ etc.}$$
$$-g^\circ pqq-\tfrac{3}{4}g'ppqq$$
$$-(h^\circ-\tfrac{1}{3}f^\circ f^\circ)pq^3$$

Operae pretium videtur, etiam aream trianguli ABD in seriem euoluere. Huic euolutioni inseruit aequatio conditionalis sequens, quae e considerationibus geometricis satis obuiis facile deriuatur, et in qua S aream quaesitam denotat:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{dS}{dp}+r\cos\psi.\frac{dS}{dq}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n\,dq$$

integratione a $q=0$ incepta. Hinc scilicet obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum

$$[7]\quad \begin{aligned} S= & \tfrac{1}{2}pq-\tfrac{1}{12}f^\circ p^3q-\tfrac{1}{20}f'p^4q-(\tfrac{1}{30}f''-\tfrac{1}{60}f^\circ f^\circ)p^5q \text{ etc.}\\ & -\tfrac{1}{12}f^\circ pq^3-\tfrac{3}{40}g^\circ p^3qq-\tfrac{1}{20}g'p^4qq\\ & -\tfrac{7}{120}f'ppq^3-(\tfrac{1}{15}h^\circ+\tfrac{2}{45}f''+\tfrac{1}{60}f^\circ f^\circ)p^3q^3\\ & -\tfrac{1}{10}g^\circ pq^4-\tfrac{3}{40}g'ppq^4\\ & -(\tfrac{1}{10}h^\circ-\tfrac{1}{30}f^\circ f^\circ)pq^5 \end{aligned}$$

25.

A formulis art. praec., quae referuntur ad triangulum a lineis breuissimis formatum rectangulum, progredimur ad generalia. Sit C aliud punctum in eadem linea breuissima DB, pro quo, manente p, characteres q', r', φ', ψ', S' eadem designent, quae q, r, φ, ψ, S pro puncto B. Ita oritur triangulum inter puncta A, B, C, cuius angulos per A, B, C, latera opposita per a, b, c, aream per σ denotamus; mensuram curuaturae in punctis A, B, C resp. per α, β, γ exprimemus. Supponendo itaque (quod licet), quantitates, p, q, $q-q'$ esse positiuas, habemus

$$A=\varphi-\varphi',\ B=\psi,\ C=\pi-\psi',\ a=q-q',\ b=r',\ c=r,\ \sigma=S-S'.$$

Ante omnia aream σ per seriem exprimemus. Mutando in [7] singulas quantitates ad B relatas in eas quae ad C referuntur, prodit formula pro S', vnde, vsque ad quantitates sexti ordinis obtinemus

$$\sigma = \tfrac{1}{2}p(q - q')(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp + qq + qq' + q'q')$$
$$- \tfrac{1}{60}f'p(6pp + 7qq + 7qq' + 7q'q')$$
$$- \tfrac{1}{20}g^\circ(q + q')(3pp + 4qq + 4qq' + 4q'q'))$$

Haec formula, adiumento seriei [2] puta

$$c\sin B = p(1 - \tfrac{1}{3}f^\circ qq - \tfrac{1}{4}f'pqq - \tfrac{1}{5}g^\circ q^3 - \text{etc.})$$

transit in sequentem

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp - qq + qq' + q'q')$$
$$- \tfrac{1}{60}f'p(6pp - 8qq + 7qq' + 7q'q')$$
$$- \tfrac{1}{20}g^\circ(3ppq + 3ppq' - 6q^3 + 4qqq' + 4qq'q' + 4q'^3))$$

Mensura curuaturae pro quouis superficiei puncto fit (per art. 19, vbi m, p, q erant quae hic sunt n, q, p)

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{dd}n}{\mathrm{d}q^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hqq + \text{etc.}}{1 + fqq + \text{etc.}}$$
$$= -2f - 6gq - (12h - 2ff)qq - \text{etc.}$$

Hinc fit, quatenus p, q ad punctum B referuntur,

$$\beta = -2f^\circ - 2f'p - 6g^\circ q - 2f''pp - 6g'pq$$
$$- (12h^\circ - 2f^\circ f^\circ)qq - \text{etc.}$$

nec non

$$\gamma = -2f^\circ - 2f'p - 6g^\circ q' - 2f''pp - 6g'pq'$$
$$- (12h^\circ - 2f^\circ f^\circ)q'q' - \text{etc.}$$

$$\alpha = -2f^\circ$$

Introducendo has mensuras curuaturae in serie pro σ, obtinemus expressionem sequentem, vsque ad quantitates sexti ordinis (excl.) exactam:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(4pp - 2qq + 3qq' + 3q'q')$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3pp - 6qq + 6qq' + 3q'q')$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(3pp - 2qq + qq' + 4qq'))$$

Praecisio eadem manebit, si pro p, q, q' substituimus $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B - a$, quo pacto prodit

$$[8] \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\, ac \sin B \big(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3aa + 4cc - 9ac\cos B) \\ + \tfrac{1}{120}\beta(3aa + 3cc - 12ac\cos B) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(4aa + 3cc - 9ac\cos B)\big).$$

Quum ex hac aequatione omnia quae ad lineam AD normaliter ad BC ductam referuntur euanuerint, etiam puncta A, B, C cum correlatis inter se permutare licebit, quapropter erit eadem praecisione

$$[9] \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A \big(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 12bc\cos A) \\ + \tfrac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 9bc\cos A) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 9bc\cos A)\big)$$

$$[10] \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C \big(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3aa + 4bb - 9ab\cos C) \\ + \tfrac{1}{120}\beta(4aa + 3bb - 9ab\cos C) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(3aa + 3bb - 12ab\cos C)\big)$$

26.

Magnam vtilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis a, b, c; anguli illius trianguli, quos per A°, B°, C° designabimus, different ab angulis trianguli in superficie curua, puta ab A, B, C, quantitatibus secundi ordinis, operaeque pretium erit, has differentias accurate euoluere. Calculorum autem prolixiorum quam difficiliorum, primaria momenta apposuisse sufficiet.

Mutando in formulis [1], [4], [5], quantitates quae referuntur ad B in eas quae referuntur ad C, nanciscemur formulas pro $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Tunc euolutio expressionis $rr + r'r' - (q - q')^2 - 2r\cos\varphi \cdot r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi \cdot r'\sin\varphi'$, quae fit $= bb + cc - aa - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^\circ - \cos A)$, combinata cum euolutione expressionis $r\sin\varphi \cdot r'\cos\varphi' - r\cos\varphi \cdot r'\sin\varphi'$, quae fit $= bc\sin A$, suppeditat formulam sequentem

$$\cos A^\circ - \mathrm{oos}\, A = -(q - q')p\sin A\big(\tfrac{1}{3}f^\circ + \tfrac{1}{6}f'p + \tfrac{1}{4}g^\circ(q + q') \\ + (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{1}{45}f^\circ f^\circ)pp + \tfrac{3}{20}g'p(q + q') \\ + (\tfrac{1}{5}h^\circ - \tfrac{7}{90}f^\circ f^\circ)(qq + qq' + q'q') + \text{etc.}\big)$$

Hinc fit porro, vsque ad quantitates quinti ordinis

$$A^* - A = -(q-q')p(\tfrac{1}{3}f^\circ + \tfrac{1}{6}f'p + \tfrac{1}{4}g^\circ(q+q') + \tfrac{1}{10}f''pp$$
$$+ \tfrac{3}{20}g'p(q+q') + \tfrac{1}{5}h^\circ(qq+qq'+q'q')$$
$$- \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(7pp+7qq+12qq'+7q'q'))$$

Combinando hanc formulam cum hac

$$2\sigma = ap(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp+qq+qq'+q'q' - \text{etc.})$$

atque cum valoribus quantitatum α, β, γ in art. praes. allatis, obtinemus vsque ad quantitates quinti ordinis

$$[11] \quad A^* = A - \sigma(\tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{2}{15}f''pp + \tfrac{1}{5}g'p(q+q')$$
$$+ \tfrac{1}{5}h^\circ(3qq - 2qq' + 3q'q')$$
$$+ \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q'))$$

Per operationes prorsus similes euoluimus

$$[12] \quad B^* = B - \sigma(\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(2q+q')$$
$$+ \tfrac{1}{5}h^\circ(4qq - 4qq' + 3q'q')$$
$$- \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(2pp + 8qq - 8qq' + 11qq'))$$

$$[13] \quad C^* = C - \sigma(\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(q+2q')$$
$$+ \tfrac{1}{5}h^\circ(3qq - 4qq' + 4q'q')$$
$$- \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q'))$$

Hinc simul deducimus, quum summa $A^* + B^* + C^*$ duobus rectis aequalis sit, excessum summae $A+B+C$ supra duos angulos rectos, puta

$$[14] \quad A+B+C = \pi + \sigma(\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}f''pp + \tfrac{1}{2}g'p(q+q')$$
$$+ (2h^\circ - \tfrac{1}{3}f^\circ f^\circ)(qq - qq' + q'q'))$$

Haec vltima aequatio etiam formulae [6] superstrui potuisset.

27.

Si superficies curua est sphaera, cuius radius $= R$, erit $\alpha = \beta = \gamma = -2f^\circ = \frac{1}{RR}$; $f'' = 0$, $g' = 0$, $6h^\circ - f^\circ f^\circ = 0$ siue $h^\circ = \frac{1}{24R^4}$. Hinc formula [14] fit

$$A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{RR}$$

quae praecisione absoluta gaudet; formulae 11 - 13 autem suppeditant

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(2pp - qq + 4qq' - q'q')$$
$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp - 2qq + 2qq' + q'q')$$
$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp + qq + 2qq' - 2q'q')$$

siue aeque exacte

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(bb + cc - 2aa)$$
$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + cc - 2bb)$$
$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + bb - 2cc)$$

Neglectis quantitatibus quarti ordinis, prodit hinc theorema notum a clar. Legendre primo propositum.

28.

Formulae nostrae generales, reiectis terminis quarti ordinis, persimplices euadunt, scilicet

$$A^* = A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)$$
$$B^* = B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma)$$
$$C^* = C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma)$$

Angulis itaque A, B, C in superficie non sphaerica reductiones inaequales applicandae sunt, vt mutatorum sinus lateribus oppositis fiant proportionales. Inaequalitas generaliter loquendo erit tertii ordinis, at si superficies parum a sphaera discrepat, illa ad ordinem altiorem referenda erit: in triangulis vel maximis in superficie telluris, quorum quidem angulos dimetiri licet, differentia semper pro insensibili haberi potest. Ita e. g. in triangulo maximo inter ea, quae annis praecedentibus dimensi sumus, puta inter puncta Hohehagen, Brocken, Inselsberg, vbi excessus summae angulorum fuit $= 14''85348$, calculus sequentes reductiones angulis applicandas prodidit:

Hohehagen	— 4″95113
Brocken	— 4,95104
Inselsberg	— 4,95131

29.

Coronidis caussa adhuc comparationem areae trianguli in superficie curua cum area trianguli rectilinei, cuius latera sunt a, b, c, adiiciemus. Aream posteriorem denotabimus per σ°, quae fit $= \frac{1}{2} bc \sin A^\circ = \frac{1}{2} ac \sin B^\circ = \frac{1}{2} ab \sin C^\circ$

Habemus, vsque ad quantitates ordinis quarti

$$\sin A^\circ = \sin A - \tfrac{1}{12}\sigma \cos A . (2\alpha + \beta + \gamma)$$

siue aeque exacte

$$\sin A = \sin A^\circ . (1 + \tfrac{1}{24} bc \cos A . (2\alpha + \beta + \gamma))$$

Substituto hoc valore in formula [9], erit vsque ad quantitates sexti ordinis

$$\sigma = \tfrac{1}{2} bc \sin A^\circ . (1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 2bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 4bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 4bc\cos A)),$$

siue aeque exacte

$$\sigma = \sigma^\circ (1 + \tfrac{1}{120}\alpha(aa + 2bb + 2cc) + \tfrac{1}{120}\beta(2aa + bb + 2cc) + \tfrac{1}{120}\gamma(2aa + 2bb + cc))$$

Pro superficie sphaerica haec formula sequentem induit formam

$$\sigma = \sigma^\circ (1 + \tfrac{1}{24}\alpha(aa + bb + cc))$$

cuius loco etiam sequentem salua eadem praecisione adoptari posse facile confirmatur

$$\sigma = \sigma^\circ \sqrt{\frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\sin A^\circ . \sin B^\circ . \sin C^\circ}}$$

Si eadem formula triangulis in superficie curua non sphaerica applicatur, error generaliter loquendo erit quinti ordinis, sed insensibilis in omnibus triangulis, qualia in superficie telluris dimetiri licet.

Planeten
(I c)

2

DETERMINATIO ATTRACTIONIS,

QUAM IN PUNCTUM QUODVIS POSITIONIS DATAE EXERCERET PLANETA, SI EIUS MASSA PER TOTAM ORBITAM, RATIONE TEMPORIS, QUO SINGULAE PARTES DESCRIBUNTUR, UNIFORMITER ESSET DISPERTITA.

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS,

ORDINIS GUELPHORUM ATQUE ORDINIS DANNEBROG EQUITE, BRITANNIARUM HANNOVERAEQUE REGI A CONSILIIS AULAE, OBSERVATORII REGII GOTTINGENSIS DIRECTORE, ASTRONOMIAE IN UNIVERSITATE GOTTINGENSI PROFESSORE, SOCIETATUM REGIARUM GOTTINGENSIS ET LONDINENSIS, ACADEMIAE BEROLINENSIS, SOCIETATIS ITALICAE ALIARUMQUE SODALI.

GOTTINGAE

APUD HENRICUM DIETERICH.

MDCCCXVIII.

DETERMINATIO ATTRACTIONIS,
QUAM IN PUNCTUM QUODVIS POSITIONIS DATAE EXERCERET PLANETA, SI EIUS MASSA PER TOTAM ORBITAM, RATIONE TEMPORIS, QUO SINGULAE PARTES DESCRIBUNTUR, UNIFORMITER ESSET DISPERTITA.

AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS
SOCIET. REG. SCIENT. EXHIBITA 1818. JAN. 17.

I.

Variationes saeculares, quas elementa orbitae planetariae a perturbatione alius planetae patiuntur, ab hujus positione in orbita sunt independentes, atque eaedem forent, sive planeta perturbans in orbita elliptica secundum Kepleri leges incedat, sive ipsius massa per orbitam eatenus aequabiliter dispertita concipiatur, ut orbitae partibus, alias aequali temporis intervallo descriptis, jam aequales massae partes tribuantur, siquidem tempora revolutionum planetae perturbati et perturbantis non sint commensurabilia. Theorema hoc elegans, si a nemine hucusque disertis verbis propositum est, saltem perfacile ex astronomiae physicae principiis demonstratur. Problema itaque se offert tum per se, tum propter plura artificia, quae ejus solutio requirit, attentione perdignum: attractionem orbitae planetariae, aut si mavis, annuli elliptici, cujus crassities infinite parva, atque secundum legem modo explicatam variabilis, in punctum quodlibet positione datum exacte determinare.

2.

Denotando excentricitatem orbitae per e, atque puncti cujusvis in ipsa anomaliam excentricam per E, hujus elemento $\mathrm{d}E$ respondebit elementum anomaliae mediae $(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E$; quamobrem elementum massae ei orbitae portiunculae, cui respondent illa elementa, tribuendum, erit ad massam integram, quam pro unitate accipiemus, ut $(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E$ ad 2π, exprimente π semicircumferentiam circuli pro radio 1. Statuendo itaque distantiam puncti attracti a puncto orbitae $= \varrho$, attractio ab orbitae elemento producta erit

$$= \frac{(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\varrho\varrho}$$

Designabimus semiaxem majorem per a, semiaxem minorem per b, atque illum tamquam lineam abscissarum, centrumque ellipsis tamquam initium adoptabimus. Hinc erit $aa - bb = aaee$, abscissa puncti orbitae $= a\cos E$, ordinata $= b\sin E$. Denique distantiam puncti attracti a plano orbitae denotabimus per C, atque coordinatas reliquas axi majori et minori parallelas per A et B. His ita praeparatis, attractio elementi orbitae decomponetur in duas axi majori et minori parallelas atque tertiam plano orbitae normalem, puta

$$\frac{(A - a\cos E)(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\varrho^3} = \mathrm{d}\xi$$

$$\frac{(B - b\sin E)(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\varrho^3} = \mathrm{d}\eta$$

$$\frac{C(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\varrho^3} = \mathrm{d}\zeta$$

ubi $\varrho = \sqrt{((A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + CC)}$.

Integratis hisce differentialibus ab $E = 0$ usque ad $E = 360°$, prodibunt attractiones partiales ξ, η, ζ secundum directiones, directionibus coordinatarum oppositas, e quibus attractio integra compo-

composita erit, et quas per methodum notam ad quaslibet alias directiones referre licebit.

3.

Rei summa jam in eo versatur, ut introducta loco ipsius E alia variabili, quantitas radicalis in formam simpliciorem redigatur. Ad hunc finem statuemus

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}$$
$$\sin E = \frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}$$

ubi autem novem coëfficientes α, α', α'' etc. manifesto non sunt penitus arbitrarii, sed certis conditionibus satisfacere debent, quas ante omnia perscrutari oportet. Primo observamus, substitutionem eandem manere, si omnes coëfficientes per eundem factorem multiplicentur, ita ut absque generalitatis detrimento uni ex ipsis valorem determinatum tribuere, e. g. statuere liceret $\gamma = 1$: attamen concinnitatis caussa omnes novem aliquantisper indefiniti maneant. Porro monemus, excludi debere valores tales, ubi α, α, α'' vel β, β', β'' ipsis γ, γ', γ'' resp. proportionales essent: alioquin enim E haud amplius indeterminata maneret. Nequeunt igitur $\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'$, $\gamma''\alpha - \gamma\alpha''$, $\gamma\alpha' - \gamma'\alpha$ simul evanescere.

Manifesto coefficientes α, α', α'' etc. ita comparati esse debent, ut fiat indefinite

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T)^2\\ +\, (\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T)^2\\ -\, (\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2\end{array}\right\} = 0$$

unde necessario haec functio habere debet formam

$$k\,(\cos T^2 + \sin T^2 - 1)$$

Hinc

Hinc colligimus ſex aequationes conditionales

$$\left.\begin{aligned}
-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma &= k \\
-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' &= -k \\
-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' &= -k \\
-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0 \\
-\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0 \\
-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Ab his aequationibus pendent plures aliae, quas evolvere operae pretium erit. Statuendo brevitatis cauſſa

$$\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \alpha\beta''\gamma' - \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta'\gamma = \varepsilon \ \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

e combinatione aequationum (I) facile derivantur novem ſequentes:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon\alpha &= -k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \\
\varepsilon\beta &= -k(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') \\
\varepsilon\gamma &= +k(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \\
\varepsilon\alpha' &= +k(\beta''\gamma - \gamma''\beta) \\
\varepsilon\beta' &= +k(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma) \\
\varepsilon\gamma' &= -k(\alpha''\beta - \beta''\alpha) \\
\varepsilon\alpha'' &= +k(\beta\gamma' - \gamma\beta') \\
\varepsilon\beta'' &= +k(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') \\
\varepsilon\gamma'' &= -k(\alpha\beta' - \beta\alpha')
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

E tribus primis harum aequationum rurſus deducimus hanc:

$$\varepsilon\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \varepsilon\beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \varepsilon\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha') =$$
$$-k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 - k(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + k(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2$$

cui aequivalens eſt haec:

$$\varepsilon\varepsilon = k(-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')(-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')$$
$$- k(-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2$$

quae adjumento aequationum 2, 3, 4 in (I) mutatur in hanc:

$$\varepsilon\varepsilon = k^3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

Aeque

Aeque facile ex aequationibus (I) derivantur hae:

$$\left.\begin{array}{lll}
(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 & = - k(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'') \\
(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 & = - k(k - \beta'\beta' - \beta''\beta'') \\
(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 & = + k(k + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'') \\
(\beta''\gamma - \gamma''\beta)^2 & = + k(k + \alpha\alpha - \alpha''\alpha'') \\
(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)^2 & = + k(k + \beta\beta - \beta''\beta'') \\
(\alpha''\beta - \beta''\alpha)^2 & = - k(k - \gamma\gamma + \gamma''\gamma'') \\
(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 & = + k(k + \alpha\alpha - \alpha'\alpha') \\
(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 & = + k(k + \beta\beta - \beta'\beta') \\
(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 & = - k(k - \gamma\gamma + \gamma'\gamma')
\end{array}\right\} \text{(V)}$$

Exempli caussa evolutionem primae adscribimus, ad cujus instar reliquae facile formabuntur. Aequationes 4, 2, 3 in (I) scilicet suppeditant

$$(\gamma'\gamma'' - \beta'\beta'')^2 - (\gamma'\gamma' - \beta'\beta')(\gamma''\gamma'' - \beta''\beta'') = \alpha'\alpha'\alpha''\alpha''$$
$$- (\alpha'\alpha' - k)(\alpha''\alpha'' - k)$$

quae aequatio evoluta protinus ipsam primam in (V) sistit.

Ex his aequationibus (V) concludimus, valorem $k = 0$ in disquisitione nostra haud admissibilem esse; hinc enim omnes novem quantitates $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$ etc. necessario evanescerent, i. e. coëfficientes $\alpha, \alpha', \alpha''$ tum ipsis β, β', β'', tum ipsis $\gamma, \gamma', \gamma''$ proportionales evaderent. Hinc etiam, propter aequationem IV, quantitas ε evanescere nequit; quamobrem k necessario debet esse quantitas positiva, siquidem omnes coëfficientes $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. debent esse reales. Combinatis tribus aequationibus primis in (III) cum tribus primis in (V), hae novae prodeunt, quae manifesto a valore ipsius k non evanescente pendent:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' = - k \\
\beta\beta - \beta'\beta' - \beta''\beta'' = - k \\
\gamma\gamma - \gamma'\gamma' - \gamma''\gamma'' = + k
\end{array}\right\} \text{(VI)}$$

Combinatio reliquarum easdem produceret. His denique adjungimus tres sequentes:

$\beta\gamma$

$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' &= 0 \\ \gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' &= 0 \\ \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' &= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{(VII)}$$

quae facile ex aequationibus III derivantur; e. g. ſecunda, quinta et octava ſuppeditant:

$$\varepsilon\beta\gamma - \varepsilon\beta'\gamma' - \varepsilon\beta''\gamma'' = k\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') - k\gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)$$
$$- k\gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') = 0$$

Manifeſto hae quoque aequationes ab excluſione valoris $k = 0$ ſunt dependentes *).

Quoniam, ut jam ſupra monuimus, omnes coëfficientes α, α', α'' etc. per eundem factorem multiplicare licet, unde valor ipſius k per quadratum ejusdem factoris multiplicatus prodibit, abhinc ſemper ſupponemus

$$k = 1$$

quo pacto neceſſario quoque erit vel $\varepsilon = +1$ vel $\varepsilon = -1$. Patet itaque, novem coëfficientes α, α', α'' etc., inter quos ſex aequationes conditionales adſunt, ad tres quantitates ab invicem independentes reducibiles eſſe debere, quod quidem commodiſſime per tres angulos ſequenti modo efficitur:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos L \tang N \\
\beta &= \sin L \tang N \\
\gamma &= \sec N \\
\alpha' &= \cos L \cos M \sec N \pm \sin L \sin M \\
\beta' &= \sin L \cos M \sec N \mp \cos L \sin M \\
\gamma' &= \cos M \tang N \\
\alpha'' &= \cos L \sin M \sec N \mp \sin L \cos M \\
\beta'' &= \sin L \sin M \sec N \pm \cos L \cos M \\
\gamma'' &= \sin M \tang N
\end{aligned}$$

ubi

*) Forſan haud ſuperfluum erit monere, nos analyſin praecedentem conſulto elegiſſe, atque alii derivationi relationum III — VII praetuliſſe, quae quamquam aliquantulum elegantior videretur, tamen, accurate examinata, quibusdam dubiis obnoxia inventa eſt, quae non ſine ambagibus removere licuiſſet.

ubi ſignorum ambiguorum ſuperiora referuntur ad caſum $\varepsilon = +1$, inferiora ad caſum $\varepsilon = -1$. Attamen tractatio analytica ad maximam partem elegantius ſine uſu horum angulorum abſolvitur. Ceterum haud difficile foret, ſignificationem geometricam tum horum angulorum, tum reliquarum quantitatum auxiliarium in hac disquiſitione occurrentium aſſignare; hanc vero interpretationem ad inſtitutum noſtrum haud neceſſariam lectori perito explicandam linquimus.

4.

Si jam in expreſſione diſtantiae ϱ pro $\cos E$ et $\sin E$ valores ſupra aſſumti ſubſtituuntur, illa in hanc formam tranſibit:

$$\varrho = \frac{\sqrt{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2 + 2H \cos T \sin T + 2H' \sin T + 2H'' \cos T)}}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}$$

ubi coëfficientes α, α', α'' etc. ita determinabimus, ut ſaluis ſex aequationibus conditionalibus

$$\left.\begin{aligned}
-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma &= 1\\
-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' &= -1\\
-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' &= -1\\
-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0\\
-\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0\\
-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0
\end{aligned}\right\} [1]$$

adeoque etiam reliquis inde demanantibus, fiat

$$H = 0,\ H' = 0,\ H'' = 0$$

quo pacto problema generaliter loquendo erit determinatum. Quodſi itaque denominatorem ipſius ϱ per t denotamus, tranſire debet functio trium quantitatem t, $t \cos E$, $t \sin E$ haec

$$(AA + BB + CC)\,tt + aa\,(t \cos E)^2 + bb\,(t \sin E)^2 - 2aA\,t.\,t \cos E$$
$$- 2bB\,t.\,t \sin E$$

per ſubſtitutionem

$$t \cos E = \alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T$$
$$t \sin E = \beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T$$
$$t \quad = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T$$

in

$$G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2$$

Manifesto hoc idem est, ac si dicas, functionem trium indeterminatarum x, y, z hanc (W)

$$aaxx + bbyy + (AA + BB + CC)\, zz - 2aAxz - 2bByz$$

per substitutionem

$$x = \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u''$$
$$y = \beta u + \beta' u' + \beta'' u''$$
$$z = \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u''$$

in functionem indeterminatarum u, u', u'' hanc

$$Guu + G'u'u' + G''u''u''$$

transire debere. At quum ex his formulis, adjumento aequationum [1] facile sequatur

$$u = -\alpha x - \beta y + \gamma z$$
$$u' = \quad \alpha' x + \beta' y - \gamma' z$$
$$u'' = \quad \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z$$

manifesto functio W identica esse debebit cum hac

$$G(-\alpha x - \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)^2 + G''(\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z)^2$$

unde habemus sex aequationes

$$\left.\begin{aligned}
aa &= G\alpha\alpha + G'\alpha'\alpha' + G''\alpha''\alpha'' \\
bb &= G\beta\beta + G'\beta'\beta' + G''\beta''\beta'' \\
AA + BB + CC &= G\gamma\gamma + G'\gamma'\gamma' + G''\gamma''\gamma'' \\
bB &= G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma'' \\
aA &= G\gamma\alpha + G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha'' \\
0 &= G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta''
\end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Ex his duodecim aequationibus [1] et [2] incognitas nostras $G, G', G'', \alpha, \alpha', \alpha''$ etc., determinare oportebit.

5.

5.

E combinatione aequationum [1] et [2] facile derivantur ſequentes:

$$-\alpha aa + \gamma aA = \alpha G$$
$$-\beta bb + \gamma bB = \beta G$$
$$\gamma(AA+BB+CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G$$

unde fit porro

$$\alpha = \frac{\gamma aA}{aa+G} \dots\dots [3]$$

$$\beta = \frac{\gamma bB}{bb+G} \dots\dots [4]$$

$$AA+BB+CC - \frac{aaAA}{aa+G} - \frac{bbBB}{bb+G} = G$$

Ultimam ſic quoque exhibere poſſumus

$$\frac{AA}{aa+G} + \frac{BB}{bb+G} + \frac{CC}{G} = 1 \dots\dots [5]$$

Perinde e combinatione aequationum [1] et [2] deducimus

$$\alpha' aa - \gamma' aA = \alpha' G'$$
$$\beta' bb - \gamma' bB = \beta' G'$$
$$-\gamma'(AA+BB+CC) - \alpha' aA - \beta' bB = \gamma' G'$$

atque hinc

$$\alpha' = \frac{\gamma' aA}{aa-G'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots [6]$$

$$\beta' = \frac{\gamma' bB}{bb-G'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots [7]$$

$$\frac{AA}{aa-G'} + \frac{BB}{bb-G'} - \frac{CC}{G'} = 1 \dots\dots [8]$$

et prorſus ſimili modo

$$\alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{aa-G''} \dots\dots\dots\dots\dots\dots [9]$$

$$g'' = \frac{\gamma'' bB}{bb - G''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [10]$$

$$\frac{AA}{aa - G''} + \frac{BB}{bb - G''} - \frac{CC}{G''} = 1 \ldots\ldots [11]$$

Patet itaque, G, $-G'$, $-G''$ esse radices aequationis

$$\frac{AA}{aa + x} + \frac{BB}{bb + x} + \frac{CC}{x} = 1 \ldots\ldots [12]$$

quae rite evoluta ita se habet

$$x^3 - (AA + BB + CC - aa - bb)xx + (aabb - aaBB - aaCC - bbAA - bbCC)x$$
$$- aabbCC = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [13]$$

6.

Jam de indole hujus aequationis cubicae sequentia sunt notanda.

I. Ex aequationis termino ultimo $-aabbCC$ concluditur, eam certe habere radicem unam realem, et quidem vel positivam, vel, si $C = 0$, cifrae aequalem. Denotemus hanc radicem realem non negativam per g.

II. Subtrahendo ab aequatione 12, ita exhibita

$$x = \frac{AAx}{aa + x} + \frac{BBx}{bb + x} + CC$$

hanc:

$$g = \frac{AAg}{aa + g} + \frac{BBg}{bb + g} + CC$$

et dividendo per $x - g$, oritur nova, duas reliquas radices complectens

$$1 = \frac{aaAA}{(aa + x)(aa + g)} + \frac{bbBB}{(bb + x)(bb + g)}$$

quae rite ordinata et soluta suppeditat [14]

$$2x = \frac{aaAA}{aa + g} + \frac{bbBB}{bb + g} - aa - bb$$

$$\pm \sqrt{\left(\left(aa - bb - \frac{aaAA}{aa + g} + \frac{bbBB}{bb + g}\right)^2 + \frac{4aabbAABB}{(aa + g)(bb + g)}\right)}$$

Haec

Haec expressio, quum quantitas sub signo radicali natura sua sit positiva, vel saltem non negativa, monstrat, etiam duas reliquas radices semper fieri reales.

III. Subtrahendo autem ab invicem aequationes istas sic exhibitas

$$gx = \frac{AAgx}{aa+x} + \frac{BBgx}{bb+x} + gCC$$

$$gx = \frac{AAgx}{aa+g} + \frac{BBgx}{bb+g} + xCC$$

et dividendo per $g-x$, prodit aequatio duas reliquas radices continens in hacce forma:

$$o = \frac{AAgx}{(aa+g)(aa+x)} + \frac{BBgx}{(bb+g)(bb+x)} + CC$$

cui manifesto, si g est quantitas positiva per valorem positivum ipsius x satisfieri nequit. Unde concludimus, aequationem nostram cubicam radices positivas plures quam unam habere non posse.

IV. Quoties itaque o non est inter radices aequationis nostrae, aderunt necessario radix una positiva cum duabus negativis. Quoties vero $C = o$, adeoque o una radicum, reliquas complectetur aequatio

$$xx - (AA + BB - aa - bb)\,x + aabb - aaBB - bbAA = o$$

unde hae radices exprimentur per

$$\tfrac{1}{2}(AA+BB-aa-bb) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{((AA-BB-aa+bb)^2 + 4AABB)}$$

Tres casus hic iterum distinguere oportebit.

Primo si terminus ultimus $aabb - aaBB - bbAA$ est positivus (i. e. si punctum attractum in plano ellipsis attrahentis *intra* curvam jacet), ambae radices, quum reales esse debeant, eodem signo affectae erunt, adeoque quum simul positivae esse nequeant, necessario erunt negativae. Ceterum hoc etiam independenpendenter ab iis, quae jam demonſtrata ſunt, inde concludi poteſt, quod coëfficiens medius, quem ita exhibere licet

$$(aabb - aaBB - bbAA)\left(\frac{1}{aa} + \frac{1}{bb}\right) + \frac{bbAA}{aa} + \frac{aaBB}{bb}$$

manifeſto in hoc caſu fit poſitivus.

Secundo, ſi terminus ultimus eſt negativus, ſive punctum attractum in plano ellipſis *extra* curvam ſitum, neceſſario altera radix poſitiva erit, altera negativa.

Tertio autem, ſi terminus ultimus ipſe evaneſceret, ſive punctum attractum in ipſa ellipſis circumferentia jaceret, etiam radix ſecunda fieret $= 0$, atque tertia

$$= -\frac{bbAA}{aa} - \frac{aaBB}{bb}$$

i. e. negativa. Ceterum hunc caſum, phyſice impoſſibilem, et in quo attractio ipſa infinite magna evaderet, a disquiſitione noſtra, hocce ſaltem loco, excludemus.

7.

Ad determinandos coëfficientes γ, γ', γ'', ex aequationibus 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10 invenimus

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{aA}{aa+G}\right)^2 - \left(\frac{bB}{bb+G}\right)^2\right)}} \\
\gamma' &= \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{aA}{aa-G'}\right)^2 + \left(\frac{bB}{bb-G'}\right)^2 - 1\right)}} \\
\gamma'' &= \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{aA}{aa-G''}\right)^2 + \left(\frac{bB}{bb-G''}\right)^2 - 1\right)}}
\end{aligned}\right\} \quad [15]$$

Ex

Ex his aequationibus rite cum 6, 8, 11 combinatis etiam sequitur:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{\frac{G}{(\frac{AG}{aa+G})^2 + (\frac{BG}{bb+G})^2 + CC}} \\
\gamma' &= \sqrt{\frac{G'}{(\frac{AG'}{aa-G'})^2 + (\frac{BG'}{bb-G'})^2 + CC}} \\
\gamma'' &= \sqrt{\frac{G''}{(\frac{AG''}{aa-G''})^2 + (\frac{BG''}{bb-G''})^2 + CC}}
\end{aligned}\right\} [16]$$

Hae posteriores expressiones ostendunt, nullam quantitatum G, G', G'' negativam esse posse, siquidem $\gamma, \gamma', \gamma''$ debent esse reales.

In casu itaque eo, ubi non est $C = 0$, necessario G aequalis statui debet radici positivae aequationis B, patetque adeo, $-G'$ aequalem esse debere alteri radici negativae, atque $-G''$ aequalem alteri *); utram vero radicem pro $-G'$, utram pro $-G''$ adoptemus, prorsus arbitrarium erit.

Quoties $C = 0$, punctumque attractum intra curvam situm, duas radices negativas aequationis 13 necessario pro $-G'$ et $-G''$ adoptare, et proin $G = 0$ statuere oportet. Quoniam vero in hoc

*) Proprie quidem ex analysi praecedente tantummodo sequitur, $-G'$ et $-G''$ satisfacere debere aequationi 13, unde dubium esse videtur, annon liceat, utramque $-G'$ et $-G''$ *eidem* radici negativae aequalem ponere, prorsus neglecta radice tertia. Sed facile perspicietur, siquidem aequationis radix secunda et tertia sint inaequales, ex $-G' = -G''$ sequi $\gamma' = \gamma''$, $\alpha' = \alpha''$, $\beta' = \beta''$, et proin $-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = -\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' = 1$, quod aequationi quartae in [1] est contrarium. Conf. quae infra de casu duarum radicum aequalium aequationis 13 dicentur.

hoc casu formula prima in 16 fit indeterminata, formulam primam in 15 ejus loco retinebimus, quae suppeditat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{AA}{aa} - \frac{BB}{bb})}}$$

Quoties autem pro $C = 0$ punctum attractum extra ellipsin jacet, aequationis 13 radix positiva statuenda est $= G$, atque vel negativa $= - G'$, et $G'' = 0$, vel radix negativa $= - G''$, et $G' = 0$; coëfficientem γ'' vel γ' vero inveniemus per formulam

$$\sqrt{(\frac{AA}{aa} + \frac{BB}{bb} - 1)}$$

Ceterum in casu jam excluso, ubi punctum attractum in ipsa circumferentia ellipsis situm supponeretur, coëfficientes γ et γ', vel γ et γ'' evaderent infiniti, quod indicat, transformationem nostram ad hunc casum omnino non esse applicabilem.

8.

Quamquam formulae 15, 16 ad determinationem coëfficientium $\gamma, \gamma', \gamma''$ sufficere possent, tamen adhuc elegantiores assignare licet. Ad hunc finem multiplicabimus aequationem [5] per $aabb - GG$, unde prodit, levi reductione facta,

$$\frac{aaAA(bb+G)}{aa+G} - AAG + \frac{bbBB(aa+G)}{bb+G} - BBG + \frac{aabbCC}{G} - CCG = aabb - GG$$

Sed e natura aequationis cubicae fit

summa radicum $G - G' - G'' = AA + BB + CC - aa - bb$

productum radicum $G\,G'\,G'' = aabbCC$

Hinc aequatio praecedens transit in sequentem:

$$\frac{aaAA(bb+G)}{aa+G} + \frac{bbBB(aa+G)}{bb+G} + G'G'' - G(G - G' - G'' + aa + bb) = aabb - GG$$

quam

quam etiam ſic exhibere licet

$$\frac{aaAA\,(bb+G)}{aa+G}+\frac{bbBB\,(aa+G)}{bb+G}-(aa+G)\,(bb+G)+(G+G')\,(G+G'')=0$$

Hinc valor coëfficientis γ e formula prima in [16] transmutatur in ſequentem:

$$\gamma=\sqrt{\frac{(aa+G)\,(bb+G)}{(G+G')\,(G+G'')}}\;\ldots\ldots\;[17]$$

Per analyſin prorſus ſimilem invenitur

$$\gamma'=\sqrt{\frac{(aa-G')\,(bb-G')}{(G+G')\,(G''-G')}}\;\ldots\ldots\;[18]$$

$$\gamma''=\sqrt{\frac{(aa-G'')\,(bb-G'')}{(G+G'')\,(G'-G'')}}\;\ldots\ldots\;[19]$$

Poſtquam coëfficientes γ, γ', γ'' inventi ſunt, reliqui α, β, α', β', α'', β'' inde per formulas 3, 4, 6, 7, 9, 10 derivabuntur.

9.

Signa expreſſionum radicalium, per quas γ, γ', γ'' determinavimus, ad lubitum accipi poſſe facile perſpicitur. Operae autem pretium eſt, inquirere, quomodo ſignum quantitatis ε cum ſignis iſtis nexum ſit. Ad hunc finem conſideremus aequationem tertiam in III art. 3.

$$\varepsilon\gamma=\alpha'\beta''-\beta'\alpha''$$

quae per formulas 6, 7, 9, 10 transmutatur in hanc:

$$\varepsilon\gamma=\frac{ab\,AB\,\gamma'\gamma''}{(aa-G')\,(bb-G'')}-\frac{ab\,AB\,\gamma'\gamma''}{(aa-G'')\,(bb-G')}$$

$$=\frac{ab\,(aa-bb)\,AB\,(G''-G')\,\gamma'\gamma''}{(aa-G')\,(aa-G'')\,(bb-G')\,(bb-G'')}$$

Sed e conſideratione aequationis 13 facile deducimus

$$(aa+G)\,(aa-G')\,(aa-G'')=aa\,(aa-bb)\,AA$$

$$(bb+G)\,(bb-G')\,(bb-G'')=-\,bb\,(aa-bb)\,BB$$

Hinc aequatio praecedens fit

$$\varepsilon\gamma = \frac{(aa+G)\,(bb+G)\,(G'-G'')\,\gamma'\gamma''}{ab\,(aa-bb)\,AB}$$

quae combinata cum aequatione 17 suppeditat

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab\,(aa-bb)\,AB}{(G+G')\,(G+G'')\,(G'-G'')}.$$

Hinc patet, si pro $-G'$ electa sit aequationis cubicae radix negativa absolute major, simulque coëfficientes γ, γ', γ'' omnes positive accepti sint, ε idem signum nancisci, quod habet AB, idemque evenire, si his quatuor conditionibus, vel omnibus vel duabus ex ipsis, contraria acta sint, oppositum vero, si uni vel tribus conditionibus adversatus fueris. Ceterum sequentes adhuc relationes notare convenit, e praecedentibus facile derivandas:

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{\varepsilon aab\,A\,AB}{(G+G')\,(G+G'')\,(G'-G'')}$$

$$\beta\beta'\beta'' = -\frac{\varepsilon abb\,ABB}{(G+G')\,(G+G'')(G'-G'')}$$

$$\alpha\beta = \frac{ab\,AB}{(G+G')\,(G+G'')}$$

$$\alpha'\beta' = -\frac{ab\,AB}{(G+G')\,(G'-G'')}$$

$$\alpha''\beta'' = \frac{ab\,AB}{(G+G'')\,(G'-G')}$$

10.

Formulae nostrae quibusdam casibus indeterminatae fieri possunt, quos seorsim considerare oportet. Ac primo quidem discutiemus casum eum, ubi aequationis cubicae radices negativae $-G'$, $-G''$ aequales fiunt, unde, per formulas 18, 19, coëfficientes γ', γ'' valores infinitos nancisci videntur, qui autem revera sunt indeterminati.

Sta-

Statuendo in formula 14, $g = G$, patet, ut duo valores ipsius x, i. e. ut $-G'$ et $-G''$ fiant aequales, necessario esse debere

$$AB = 0,\ aa - bb - \frac{aaAA}{aa+G} + \frac{bbBB}{bb+G} = 0$$

Hinc facile intelligitur, quum $aa - bb$ natura sua sit vel quantitas positiva, vel $= 0$, esse debere

$$B = 0$$

$$aa - bb = \frac{aaAA}{aa+G},\ \text{sive}\ aa + G = \frac{aaAA}{aa-bb}$$

Substituendo hos valores in aequatione 14, fit

$$G' = G'' = bb$$

Substituendo porro valorem $x = bb$ in aequatione cubica 13, prodit

$$(aa - bb)(CC + bb) = bbAA$$

Quoties haec aequatio conditionalis simul cum aequatione $B = 0$ locum habet, casus, quem hic tractamus, adducitur. Et quum fiat

$$G = \frac{aaAA}{aa-bb} - aa = \frac{aaCC}{bb}$$

formula 17 suppeditat

$$\gamma = \sqrt{\frac{aabbAA}{(aa-bb)(aaCC+b^4)}} = \sqrt{\frac{aaCC+aabb}{aaCC+b^4}}$$

ac dein formulae 3, 4

$$\alpha = \frac{\gamma(aa-bb)}{aA} = \frac{\gamma bbA}{a(CC+bb)} = \sqrt{\frac{bb(aa-bb)}{aaCC+b^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^4AA}{(CC+bb)(aaCC+b^4)}}$$

$$\beta = 0$$

Valores coëfficientium γ', γ'' per formulas 18, 19 in hoc casu indeterminati manent, atque sic etiam valores coëfficientium reliquorum α', β', α'', β''. Nihilominus per unum horum coëffi-

 cien-

cientium omnes quinque reliqui exprimi poſſunt, e. g. fit per formulam 6

$$\alpha' = \frac{\gamma' a A}{aa - bb}$$

ac dein

$$\beta' = \sqrt{(1 - \alpha'\alpha' + \gamma'\gamma')},\ \gamma'' = \sqrt{(\gamma\gamma - 1 - \gamma'\gamma')},$$

$$\alpha'' = \frac{\gamma'' a A}{aa - bb},\ \beta'' = \sqrt{(1 - \alpha''\alpha'' + \gamma''\gamma'')}.$$

Sed concinnius hoc ita perficitur. Ex

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha,\ \alpha\alpha' = \gamma\gamma',\ 1 = \alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma'$$

ſequitur

$$\beta'\beta' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\gamma\gamma\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1$$

Quapropter ſtatuere poſſumus

$$\beta' = \cos f,\ \gamma' = \alpha \sin f,\ \alpha' = \gamma \sin f$$

Dein vero e formulis $\varepsilon\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta'$, $\varepsilon\beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma'$, $\varepsilon\gamma'' = \beta\alpha' - \alpha\beta'$, $\varepsilon\varepsilon = 1$ invenimus

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma \cos f,\ \beta'' = \varepsilon \sin f,\ \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f$$

Valor anguli f hic arbitrarius eſt, nec non pro lubitu ſtatui poterit vel $\varepsilon = +1$ vel $\varepsilon = -1$.

II.

Si G', G'' ſunt inaequales, valores coëfficientium γ, γ', γ'' per formulas 17, 18, 19 indeterminati eſſe nequeunt, ſed quoties aliqua quantitatum $aa - G'$, $bb - G'$, $aa - G''$, $bb - G''$ evaneſcit, valor coëfficientis α', β', α'', γ'' per formulam 6, 7, 9, 10 reſp. indeterminatus manere primo aſpectu videtur, quod tamen ſecus ſe habere levis attentio docebit.

Supponamus e. g., eſſe $aa - G' = 0$, fietque, per aequationem 18, $\gamma' = 0$, nec non per aequationem 7, $\beta' = 0$ (ſiquidem non fuerit ſimul $aa = bb$), unde neceſſario eſſe debet $\alpha' = \pm 1$.

Si

Si vero simul $aa = bb$, formula, quae praecedit sextam in art. 5, suppeditat $\alpha' A + \beta' B = 0$, quae aequatio cum $\alpha'\alpha' + \beta'\beta' = 1$ juncta, producit

$$\alpha' = \frac{B}{\sqrt{(AA + BB)}},\ \beta' = \frac{-B}{\sqrt{(AA + BB)}}$$

Hae expressiones manifesto indeterminatae esse nequeunt, nisi simul fuerit $A = 0$, $B = 0$; tunc vero ad casum in art. praec. jam consideratum delaberemur.

12.

Postquam duodecim quantitates $G, G', G'', \alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ complete determinare docuimus, ad evolutionem differentialis $\mathrm{d}E$ progredimur. Statuamus

$$t = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T \ldots\ldots [20]$$

ita ut fiat

$$t \cos E = \alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T \ldots [21]$$

$$t \sin E = \beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T \ldots [22]$$

Hinc deducimus

$$t\,\mathrm{d}E = \cos E\,\mathrm{d}.\,t \sin E - \sin E\,\mathrm{d}.\,t \cos E$$

$$= \cos E\,(\beta'' \cos T - \beta' \sin T)\,\mathrm{d}T - \sin E\,(\alpha'' \cos T - \alpha' \sin T)\,\mathrm{d}T$$

adeoque

$$tt\,\mathrm{d}E = (\alpha\beta'' - \alpha\beta'')\cos T\,\mathrm{d}T + (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\sin T\,\mathrm{d}T + (\alpha'\beta'' - \alpha\beta'')\,\mathrm{d}T$$

$$= \varepsilon\gamma' \cos T\,\mathrm{d}T + \varepsilon\gamma'' \sin T\,\mathrm{d}T + \varepsilon\gamma\,\mathrm{d}T = \varepsilon t\,\mathrm{d}T$$

sive

$$t\,\mathrm{d}E = \varepsilon\,\mathrm{d}T \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [23]$$

Observare convenit, quantitatem t natura sua semper positivam esse, si coëfficiens γ sit positivus, vel semper negativam, si γ sit negativus. Quum enim sit $(\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2 + (\gamma'' \cos T - \gamma' \sin T)^2 = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = \gamma\gamma - 1$, erit semper $\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T$, sine respectu signi, minor quam γ. Hinc concludimus, quoties $\varepsilon\gamma$ sit quantitas positiva, variabiles

E

E et T ſemper ſimul creſcere; quoties autem $\varepsilon\gamma$ ſit quantitas negativa, neceſſario alteram variabilem ſemper decreſcere, dum altera augeatur.

13.

Nexus inter variabiles E et T adhuc melius illuſtratur per ratiocinia ſequentia. Statuendo $\sqrt{(\gamma\gamma - 1)} = \delta$, ita ut fiat $\delta\delta = \alpha\alpha + \mathfrak{b}\mathfrak{b} = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma''$, ex aequationibus 20, 21, 22 deducimus

$$\begin{aligned} t(\delta + \alpha\cos E + \mathfrak{b}\sin E) &= \gamma\delta + \alpha\alpha + \mathfrak{b}\mathfrak{b} + (\gamma'\delta + \alpha\alpha' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}')\cos T \\ &\quad + (\gamma''\delta + \alpha\alpha'' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'')\sin T \\ &= (\gamma + \delta)(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T) \end{aligned}$$

Perinde ex aequationibus 21, 22 ſequitur

$$t(\alpha\sin E - \mathfrak{b}\cos E) = \varepsilon(\gamma'\sin T - \gamma''\cos T)$$

Hae aequationes, ſtatuendo

$$\frac{\alpha}{\delta} = \cos L,\ \frac{\mathfrak{b}}{\delta} = \sin L,\ \frac{\gamma'}{\delta} = \cos M,\ \frac{\gamma''}{\delta} = \sin M$$

nanciſcuntur formam ſequentem:

$$t(1 + \cos(E - L)) = (\gamma + \delta)(1 + \cos(T - M))$$
$$t\sin(E - L) = \varepsilon\sin(T - M)$$

unde fit per diviſionem, propter $(\gamma + \delta)(\gamma - \delta) = 1$,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E - L) = \varepsilon(\gamma - \delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T - M)$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T - M) = \varepsilon(\gamma + \delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E - L)$$

Hinc non ſolum eadem concluſio derivatur, ad quam in fine art. praec. deducti ſumus, ſed inſuper etiam patet, ſi valor ipſius E creſcat 360 gradibus, valorem ipſius T tantundem vel creſcere vel diminui, prout $\varepsilon\gamma$ ſit vel quantitas poſitiva vel negativa. Ceterum ſtatuendo $\delta = \operatorname{tang} N$, $\gamma = \sec N$, manifeſto erit

$$\gamma - \delta = \operatorname{tang}(45° - \tfrac{1}{2}N),\ \gamma + \delta = \operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}N)$$

14.

E combinatione aequationum 20, 21, 22 cum aequationibus art. 5 obtinemus:

$$at(A - a\cos E) = \alpha G - \alpha' G' \cos T - \alpha'' G'' \sin T$$
$$bt(B - b\sin E) = \beta G - \beta' G' \cos T - \beta'' G'' \sin T$$

Statuendo itaque brevitatis gratia

$$(\alpha G - \alpha' G' \cos T - \alpha'' G'' \sin T)(\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T) = aX$$
$$(\beta G - \beta' G' \cos T - \beta'' G'' \sin T)(\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T) = bY$$
$$C(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)(\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T) = Z$$

fit

$$d\xi = \frac{\varepsilon X dT}{2\pi t^3 \rho^3},\ d\eta = \frac{\varepsilon Y dT}{2\pi t^3 \rho^3},\ d\zeta = \frac{\varepsilon Z dT}{2\pi t^3 \rho^3}$$

Sed habetur

$$t\rho = \pm\sqrt{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)}$$

signo superiori vel inferiori valente, prout t est quantitas positiva vel negativa (ρ enim natura sua semper positive accipitur), i. e. prout coëfficiens γ est positivus vel negativus. Hinc

$$\frac{\varepsilon dT}{2\pi t^3 \rho^3} = \pm \frac{dT}{2\pi (G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ubi signum ambiguum a signo quantitatis $\gamma\varepsilon$ pendet.

Ut jam valores ipsarum ξ, η, ζ obtineamus, integrationes differentialium exsequi oportet, a valore ipsius T, cui respondet $E = 0$, usque ad valorem, cui respondet $E = 360°$, sive etiam (quod manifesto eodem redit) a valore ipsius T cui respondet valor arbitrarius ipsius E, usque ad valorem, cui respondet valor ipsius E auctus $360°$; licebit itaque integrare a $T = 0$ usque ad $T = 360°$, quoties $\varepsilon\gamma$ est quantitas positiva, vel a $T = 360°$ usque

usque ad $T = 0$ quoties $\varepsilon\gamma$ est negativa. Manifesto itaque, independenter a signo ipsius $\varepsilon\gamma$, erit:

$$\xi = \int \frac{X\,\mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\eta = \int \frac{Y\,\mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\zeta = \int \frac{Z\,\mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integrationibus a $T = 0$ usque ad $T = 360°$ extensis.

15.

Nullo negotio perspicitur, integralia

$$\int \frac{\cos T\,\mathrm{d}T}{(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{\sin T\,\mathrm{d}T}{(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{\cos T\sin T\,\mathrm{d}T}{(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a $T = 180°$ usque ad $T = 360°$ extensa obtinere valores aequales iis, quos nanciscantur, si a $T = 0$ usque ad $T = 180°$ extendantur, sed signis oppositis affectos; quapropter ista integralia a $T = 0$ usque ad $T = 360°$ extensa manifesto fiunt $= 0$. Hinc colligimus, esse

$$\xi = \int \frac{((\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G'\cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G''\sin T^2)\,\mathrm{d}T}{2\pi a(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\eta = \int \frac{((\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G'\cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G''\sin T^2)\,\mathrm{d}T}{2\pi b(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\zeta = \int \frac{((\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma'\cos T^2 + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma''\sin T^2)\,C\,\mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integra-

integralibus a $T = 0$ usque ad $T = 360°$ extenſis. Quodſi itaque valores integralium, eadem extenſione acceptorum,

$$\int \frac{\cos T^2 \, \mathrm{d}\, T}{2\pi\,((G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{\sin T^2 \, \mathrm{d}\, T}{2\pi\,((G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

per P, Q denotamus, erit

$$a\xi = ((\gamma - e\alpha)\,\alpha\,G - (\gamma' - e\alpha')\,\alpha'\,G')\,P + \\ ((\gamma - e\alpha)\,\alpha\,G - (\gamma'' - e\alpha'')\,\alpha''\,G'')\,Q$$

$$b\eta = ((\gamma - e\alpha)\,\beta\,G - (\gamma' - e\alpha')\,\beta'\,G')\,P + \\ ((\gamma - e\alpha)\,\beta\,G - (\gamma'' - e\alpha'')\,\beta''\,G'')\,Q$$

$$\zeta = ((\gamma - e\alpha)\,\gamma + (\gamma' - e\alpha')\,\gamma')\,C\,P + \\ ((\gamma - e\alpha)\,\gamma + (\gamma'' - e\alpha'')\,\gamma'')\,C\,Q$$

quo pacto problema noſtrum complete ſolutum eſt.

16.

Quod attinet ad quantitates P, Q, manifeſto quidem utraque fit

$$= \frac{1}{2\,(G + G')^{\frac{3}{2}}}$$

quoties $G' = G''$, in omnibus vero reliquis caſibus ad transscendentes ſunt referendae. Quas quomodo per ſeries exprimere liceat, abunde conſtat. Lectoribus autem gratum fore ſperamus, ſi hacce occaſione determinationem harum aliarumque transscendentium per algorithmum peculiarem expeditiſſimum explicemus, quo per multos jam abhinc annos frequenter uſi ſumus, et de quo alio loco copioſius agere propoſitum eſt.

Sint m, n duae quantitates poſitivae, ſtatuamusque

$$m' = \tfrac{1}{2}(m + n), \quad n' = \sqrt{m\,n}$$

ita ut m', n' refp. ſit medium arithmeticum et geometricum inter m et n. Medium geometricum ſemper poſitive accipi ſupponemus. Perinde fiat

$$m'' = \tfrac{1}{2}(m' + n'),\ n'' = \sqrt{m'n'}$$
$$m''' = \tfrac{1}{2}(m'' + n''),\ n''' = \sqrt{m''n''}$$

et ſic porro, quo pacto feries m, m', m'', m''' etc., atque n, n', n'', n''' etc. verſus *limitem communem* rapidiſſime convergent, quem per μ deſignabimus, atque ſimpliciter *medium arithmetico-geometricum* inter m et n vocabimus. Jam denoſtrabimus, $\frac{1}{\mu}$ eſſe valorem integralis

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{2\pi\sqrt{(mm \cos T^2 + nn \sin T^2)}}$$

a $T = 0$ usque ad $T = 360°$ extenſi.

Demonstr. Supponamus, variabilem T ita per aliam T' exprimi, ut fiat

$$\sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n)\cos T'^2 + 2m \sin T'^2}$$

perſpicieturque facile, dum T' a valore 0 usque ad 90°, 180°, 270°, 360° augeatur, etiam T (etſi inaequalibus intervallis) a 0 usque ad 90°, 180°, 270°, 360° crescere. Evolutione autem rite facta, invenitur eſſe

$$\frac{\mathrm{d}T}{\sqrt{(mm \cos T^2 + nn \sin T^2)}} = \frac{\mathrm{d}T'}{\sqrt{(m'm' \cos T'^2 + n'n' \sin T'^2)}}$$

adeoque valores integralium

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}},\ \int \frac{\mathrm{d}T'}{2\pi\sqrt{(m'm' \cos T'^2 + n'n' \sin T'^2)}}$$

ſi utriusque variabilis a valore 0 usque ad valorem 360° extenditur

ditur, inter se aequales. Et quum perinde ulterius continuare liceat, patet, his valoribus etiam aequalem esse valorem integralis

$$\int \frac{d\Theta}{2\pi \surd (\mu\mu \cos\Theta^2 + \mu\mu \sin\Theta^2)}$$

a $\Theta = 0$ usque ad $\Theta = 360°$, qui manifesto fit $= \frac{1}{\mu}$. *Q.E.D.*

17.

Ex aequatione, relationem inter T et T' exhibente,

$$(m-n) \sin T. \sin T'^2 = 2m \sin T' - (m+n) \sin T$$

facile deducitur

$$\surd (mm \cos T^2 + nn \sin T^2) = m - (m-n) \sin T. \sin T'$$

$$\surd (m'm' \cos T'^2 + n'n' \sin T'^2) = m \operatorname{cotang} T. \operatorname{tang} T'$$

atque hinc, adjumento ejusdem aequationis,

$$\sin T. \sin T'. \surd (mm \cos T^2 + nn \sin T^2) + m' (\cos T^2 - \sin T^2) =$$
$$\cos T. \cos T'. \surd (m'm' \cos T'^2 + n'n' \sin T'^2) - \tfrac{1}{2} (m-n) \sin T'^2$$

Multiplicata hac aequatione per

$$\frac{dT}{\surd (mm \cos T^2 + nn \sin T^2)} = \frac{dT'}{\surd (m'm' \cos T'^2 + n'n' \sin T'^2)}$$

prodit

$$\frac{m' (\cos T^2 - \sin T^2)\, dT}{\surd (mm \cos T^2 + nn \sin T^2)} = - \frac{\tfrac{1}{2} (m-n) \sin T'^2\, dT'}{\surd (m'm' \cos T'^2 + n'n' \sin T'^2)}$$
$$+ d. \sin T' \cos T$$

Multiplicando hanc aequationem per $\frac{m-n}{\pi}$, substituendo $m'(m-n) = \frac{1}{2}(mm - nn)$, $(m-n)^2 = 4(m'm' - n'n')$, $\sin T'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos T'^2 - \sin T'^2)$, et integrando, a valoribus T et $T' = 0$ usque ad $360°$, habemus:

$$(mm-nn)\int\frac{(\cos T^2-\sin T^2).\,\mathrm{d}T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2+nn\sin T^2)}}=-\frac{2(m'm'-n'n')}{\mu}$$
$$+\,2(m'm'-n'n')\int\frac{(\cos T'^2-\sin T'^2)\,\mathrm{d}T'}{2\pi\sqrt{(m'm'\cos T'^2+n'n'\sin T'^2)}}$$

Et quum integrale definitum ad dextram perinde transformare liceat, manifeſto integrale

$$\int\frac{(\cos T^2-\sin T^2)\,\mathrm{d}T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2+nn\sin T^2)}}$$

exprimetur per ſeriem infinitam citiſſime convergentem

$$-\frac{2(m'm'-n'n')+4(m''m''-n''n'')+8(m'''m'''-n'''n''')+\text{etc.}}{(mm-nn)\,\mu}=-\frac{\mu}{\nu}.$$

Calculus numericus commodiſſime per logarithmos perficitur, ſi ſtatuimus

$\frac{1}{4}\sqrt{(mmn-nn)}=\lambda$, $\frac{1}{4}\sqrt{(m'm'-n'n')}=\lambda'$, $\frac{1}{4}\sqrt{(m''m''-n''n'')}=\lambda''$ etc.

unde erit

$$\lambda'=\frac{\lambda\lambda}{m'},\ \lambda''=\frac{\lambda'\lambda'}{m''},\ \lambda'''=\frac{\lambda''\lambda''}{m'''}\ \text{etc. atque}$$

$$\nu=\frac{2\lambda'\lambda'+4\lambda''\lambda''+8\lambda'''\lambda'''+\text{etc.}}{\lambda\lambda}$$

18.

Per methodum hic explicatam etiam integralia *indefinita* (a valore variabilis $=0$ inchoantia) maxima concinnitate aſſignare licet. Scilicet, ſi T'' perinde per m', n', T' determinari ſupponitur, uti T' per m, n, T, ac perinde rurſus T''' per m'', n'', T'' et ſic porro, etiam pro quovis valore determinato ipſius T, valores

lores terminorum ferie T, T', T'', T''' etc. ad limitem Θ citiffime convergent, eritque

$$\int \frac{\mathrm{d}\,T}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = \frac{\Theta}{\mu}$$

$$\int \frac{(\cos T^2 - \sin T^2)\,\mathrm{d}\,T}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = -\frac{\nu\Theta}{\mu}$$

$$+ \frac{\lambda'\cos T\sin T' + 2\lambda''\cos T'\sin T'' + 4\lambda'''\cos T''\sin T''' + \text{etc.}}{\lambda\lambda}$$

Sed haec obiter hic addigitaviffe fufficiat, quum ad inftitutum noftrum non fint neceffaria.

19.

Quodfi jam ftatuimus $m = \sqrt{(G + G')}$, $n = \sqrt{(G + G'')}$, valores quantitatum P, Q facile ad transscendentes μ, ν reducentur. Quum enim P, Q fint valores integralium

$$\int \frac{\cos T^2\,\mathrm{d}\,T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \int \frac{\sin T^2\,\mathrm{d}\,T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a $T = 0$ usque ad $T = 360°$ extenforum, primo ftatim obvium eft, haberi

$$mmP + nnQ = \frac{1}{\mu} \ldots\ldots\ldots [24]$$

Porro fit

$$\frac{(\cos T^2 - \sin T^2)\,\mathrm{d}\,T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} + \frac{(mm\cos T^2 - nn\sin T^2)\,\mathrm{d}\,T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(mm\cos T^4 - nn\sin T^4)\,\mathrm{d}\,T}{\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \mathrm{d}.\,\frac{\cos T\sin T}{\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

Inte-

Integrando hanc aequationem a $T = 0$ usque ad $T = 360°$, prodit

$$-\frac{\nu}{\mu} + mmP - nnQ = 0 \ldots [25]$$

E combinatione aequationum 24, 25 denique colligimus

$$P = \frac{1+\nu}{2mm\mu},\ Q = \frac{1-\nu}{2nn\mu}.$$

Gauss (Theory of)
I C I

THEORIA

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

ORDINIS GUELPHORUM ATQUE ORDINIS DANNEBROG EQUITE, BRITANNIARUM HANNOVERAEQUE REGI A CONSILIIS AULAE, OBSERVATORII REGII GOTTINGENSIS DIRECTORE, ASTRONOMIAE IN UNIVERSITATE GOTTINGENSI PROFESSORE, SOCIETATUM REGIARUM GOTTINGENSIS, LONDINENSIS, EDINBURGENSIS, HAVNIENSIS, ACADEMIARUM REGIARUM BEROLINENSIS, PARISINAE, NEAPOLITANAE, HOLMIENSIS, MONACHIENSIS, SOCIETATIS ITALICAE, CURONENSIS, ASTRONOMICAE LONDINENSIS, ACADEMIAE AMERICANAE ALIARUMQUE SOCIO.

GOTTINGAE

APUD HENRICUM DIETERICH.

1823.

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS.

PARS PRIOR.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA FEBR. 15. 1821.

1.

Quantacunque cura instituantur obseruationes, rerum naturalium magnitudinem spectantes, semper tamen erroribus maioribus minoribusue obnoxiae manent. Errores obseruationum plerumque non sunt simplices, sed e pluribus fontibus simul originem trahunt: horum fontium duas species probe distinguere oportet. Quaedam errorum caussae ita sunt comparatae, vt ipsarum effectus in qualibet obseruatione a circumstantiis variabilibus pendeat, inter quas et ipsam obseruationem nullus nexus essentialis concipitur: errores hinc oriundi irregulares seu fortuiti vocantur, quatenusque illae circumstantiae calculo subiici nequeunt, idem etiam de erroribus ipsis valet. Tales sunt errores ab imperfectione sensuum prouenientes, nec non a caussis extraneis irregularibus, e. g. a motu tremulo aeris visum tantillum turbante; plura quoque vitia instrumentorum vel optimorum huc trahenda sunt, e. g. asperitas partis interioris libellularum, defectus firmitatis absolutae etc. Contra aliae errorum caussae in omnibus obseruationibus ad idem genus relatis natura sua effectum vel absolute constantem exserunt, vel saltem talem, cuius magnitudo secundum legem determinatam vnice a circumstantiis, quae tamquam essentialiter cum obseruatione nexae spectantur, pendet. Huiusmodi errores constantes seu regulares appellantur.

Ceterum perspicuum est, hanc distinctionem quodammodo relatiuam esse, et a sensu latiori vel arctiori, quo notio obseruationum ad idem genus pertinentium accipitur, pendere. E. g. vitia irregularia in diuisione instrumentorum ad angulos mensurandos errorem constantem producunt, quoties tantummodo de obseruatione anguli determinati indefinite repetenda sermo est, siquidem hic semper eaedem diuisiones vitiosae adhibentur: contra error ex illo fonte oriundus tamquam fortuitus spectari potest, quoties indefinite de angulis cuiusuis magnitudinis mensurandis agitur, siquidem tabula quantitatem erroris in singulis diuisionibus exhibens non adest.

2.

Errorum regularium consideratio proprie ab instituto nostro excluditur. Scilicet obseruatoris est, omnes caussas, quae errores constantes producere valent, sedulo inuestigare, et vel amovere, vel saltem earum rationem et magnitudinem summo studio perscrutari, vt effectus in quauis obseruatione determinata assignari, adeoque haec ab illo liberari possit, quo pacto res eodem redit, ac si error omnino non affuisset. Longe vero diuersa est ratio errorum irregularium, qui natura sua calculo subiici nequeunt. Hos itaque in obseruationibus quidem tolerare, sed eorum effectum in quantitates ex obseruationibus deriuandas per scitam harum combinationem quantum fieri potest extenuare oportet. Cui argumento grauissimo sequentes disquisitiones dicatae sunt.

3.

Errores obſeruationum ad idem genus pertinentium, qui a cauſſa ſimplici determinata oriuntur, per rei naturam certis *limitibus* ſunt circumſcripti, quos ſine dubio exacte aſſignare liceret, ſi indoles ipſius cauſſae *penitus* eſſet perſpecta. Pleraeque errorum fortuitorum cauſſae ita ſunt comparatae, vt ſecundum legem continuitatis omnes errores intra iſtos limites comprehenſi pro poſſibilibus haberi debeant, perfectaque cauſſae cognitio etiam doceret, vtrum omnes hi errores aequali facilitate gaudeant an inaequali, et quanta probabilitas relatiua, in caſu poſteriori, cuiuis errori tribuenda ſit. Eadem etiam reſpectu erroris totalis, e pluribus erroribus ſimplicibus conflati, valebunt, puta incluſus erit certis limitibus, (quorum alter aequalis erit aggregato omnium limitum ſuperiorum partialium, alter aggregato omnium limitum inferiorum); omnes errores intra hos limites poſſibiles quidem erunt, ſed prout quisque infinitis modis diuerſis ex erroribus partialibus componi poteſt, qui ipſi magis minusue probabiles ſunt, alii maiorem, alii minorem facilitatem tribuere debebimus, eruique poterit lex probabilitatis relatiuae, ſi leges errorum ſimplicium cognitae ſupponuntur, ſaluis difficultatibus analyticis in colligendis omnibus combinationibus.

Exſtant vtique quaedam errorum cauſſae, quae errores non ſecundum legem continuitatis progredientes, ſed discretos tantum, producere poſſunt, quales ſunt errores diuiſionis inſtrumentorum, (ſiquidem illos erroribus fortuitis annumerare placet): diuiſionum enim multitudo in quouis inſtrumento determinato eſt finita. Manifeſto autem, hoc non obſtante, ſi modo non omnes errorum cauſſae errores discretos producant, complexus omnium errorum totalium poſſibilium conſtituet ſeriem ſecundum legem continuitatis progredientem, ſiue plures eiusmodi ſeries interruptas, ſi forte, omnibus erroribus discretis poſſibilibus ſecundum magnitudinem ordinatis, vna alteraue differentia inter binos terminos proximos maior euadat, quam differentia inter limites errorum totalium, quatenus e solis erroribus continuis demanant. Sed in praxi casus posterior vix vmquam locum habebit, nisi diuisio vitiis crassioribus laboret.

4.

Designando facilitatem relatiuam erroris totalis x, in determinato obseruationum genere, per characteristicam φx, hoc, propter errorum continuitatem, ita intelligendum erit, probabilitatem erroris inter limites infinite proximos x et $x + dx$ esse $= \varphi x . dx$. Vix, ac ne vix quidem, vmquam in praxi possibile erit, hanc functionem a priori assignare: nihilominus plura generalia eam spectantia stabiliri possunt, quae deinceps proferemus. Obuium est, functionem φx eatenus ad functiones discontinuas referendam esse, quod pro omnibus valoribus ipsius x, extra limites errorum possibilium iacentibus esse debet $= 0$; intra hos limites vero vbique valorem positiuum nanciscetur (omittendo casum, de quo in fine art. praec. locuti sumus). In plerisque casibus errores positiuos et negatiuos eiusdem magnitudinis aeque faciles supponere licebit, quo pacto erit $\varphi(-x) = \varphi x$. Porro quum errores leuiores facilius committantur quam grauiores, plerumque valor ipsius φx erit maximus pro $x = 0$, continuoque decrescet, dum x augetur.

Generaliter autem valor integralis $\int \varphi x . dx$, ab $x = a$ vsque ad $x = b$ extensi exprimet probabilitatem, quod error aliquis nondum cognitus iaceat inter limites a et b. Valor itaque istius integralis a limite inferiori omnium errorum possibilium vsque ad limitem superiorem extensi semper erit $= 1$. Et quum φx pro omnibus valoribus ipsius x extra hos limites iacentibus semper sit $= 0$, manifesto etiam

valor integralis $\int \varphi x . dx$ *ab* $x = -\infty$ *vsque ad* $x = +\infty$ *extensi semper fit* $= 1$.

5.

Consideremus porro integrale $\int x \varphi x \,.\, dx$ inter eosdem limites, cuius valorem statuemus $= k$. Si omnes errorum caussae simplices ita sunt comparatae, vt nulla adsit ratio, cur errorum aequalium sed signis oppositis affectorum alter facilius producatur quam alter, hoc etiam respectu erroris totalis valebit, siue erit $\varphi(-x) = \varphi x$, et proin necessario $k = 0$. Hinc colligimus, quoties k non euanescat sed e. g. sit quantitas positiua, necessario adesse debere vnam alteramue errorum caussam, quae vel errores positiuos tantum producere possit, vel certe positiuos facilius quam negatiuos. Haecce quantitas k, quae reuera est medium omnium errorum possibilium, seu valor medius ipsius x, commode dici potest erroris pars constans. Ceterum facile probari potest, partem constantem erroris totalis aequalem esse aggregato partium constantium, quas continent errores e singulis caussis simplicibus prodeuntes. Quodsi quantitas k nota supponitur, a quauis obseruatione resecatur, errorque obseruationis ita correctae designatur per x', ipsiusque probabilitas per $\varphi' x'$, erit $x' = x - k$, $\varphi' x' = \varphi x$ ac proin $\int x' \varphi' x' \,.\, dx' = \int x \varphi x \,.\, dx - \int k \varphi x \,.\, dx = k - k = 0$, i. e. errores obseruationum correctarum partem constantem non habebunt, quod et per se clarum est.

6.

Perinde vt integrale $\int x \varphi x \,.\, dx$, seu valor medius ipsius x, erroris constantis vel absentiam vel praesentiam et magnitudinem docet, integrale

$$\int x x \varphi x \,.\, dx$$

ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extensum (seu valor medius quadrati xx) aptissimum videtur ad incertitudinem obseruationum in genere definiendam et dimetiendam, ita vt e duobus obseruationum systematibus, quae quoad errorum facilitatem inter se differunt, eae praecisione praestare censeantur, in quibus integrale $\int xx\varphi x\,.\,dx$ valorem minorem obtinet. Quodsi quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente necessitate, electam esse obiiciat, lubenter assentiemur. Quippe quaestio haec per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circumscribi nisi per principium aliquatenus arbitrarium nequit. Determinatio alicuius quantitatis per obseruationem errori maiori minoriue obnoxiam, haud inepte comparatur ludo, in quo solae iacturae, lucra nulla, dum quilibet error metuendus iacturae affinis est. Talis ludi dispendium aestimatur e iactura probabili, puta ex aggregato productorum singularum iacturarum possibilium in probabilitates respectiuas. Quantae vero iacturae quemlibet obseruationis errorem aequiparare conueniat, neutiquam per se clarum est; quin potius haec determinatio aliqua ex parte ab arbitrio nostro pendet. Iacturam ipsi errori aequalem statuere manifesto non licet; si enim errores positiui pro iacturis acciperentur, negatiui lucra repraesentare deberent. Magnitudo iacturae potius per talem erroris functionem exprimi debet, quae natura sua semper sit positiua. Qualium functionum quum varietas sit infinita, simplicissima, quae hac proprietate gaudet, prae ceteris eligenda videtur, quae absque lite est quadratum: hoc pacto principium supra prolatum prodit.

III. Laplace simili quidem modo rem considerauit, sed errorem ipsum semper positiue acceptum tamquam iacturae mensuram adoptauit. At ni fallimur haecce ratio saltem non minus arbitraria est quam nostra: vtrum enim error duplex aeque tolerabilis putetur quam simplex bis repetitus, an aegrius, et proin vtrum magis conueniat, errori duplici momentum duplex tantum, an maius, tribuere, quaestio est neque per se clara, neque demonstrationibus mathematicis decidenda, sed libero tantum arbitrio remittenda. Praeterea negari non potest, ista ratione continuitatem laedi: et propter hanc ipsam caussam modus ille tractationi analyticae magis refragatur, dum ea, ad quae principium nostrum perducit, mira tum simplicitate tum generalitate commendantur.

7.

Statuendo valorem integralis $\int xx\varphi x . dx$ ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extensi $= mm$, quantitatem m vocabimus *errorem medium metuendum*, siue simpliciter *errorem medium* obseruationum, quarum errores indefiniti x habent probabilitatem relatiuam φx. Denominationem illam non ad obseruationes immediatas limitabimus, sed etiam ad determinationes qualescunque ex obseruationibus deriuatas extendemus. Probe autem cauendum est, ne error medius confundatur cum medio arithmetico omnium errorum, de quo in art. 5. locuti sumus.

Vbi plura obseruationum genera, seu plures determinationes ex obseruationibus petitae, quibus haud eadem praecisio concedenda est, comparantur, *pondus* earum relatiuum nobis erit quantitas ipsi mm reciproce proportionalis, dum *praecisio* simpliciter ipsi m reciproce proportionalis habetur. Quo igitur pondus per numerum exprimi possit, pondus certi obseruationum generis pro vnitate acceptum esse debet.

8.

Si obseruationum errores partem constantem implicant, hanc auferendo error medius minuitur, pondus et praecisio augentur. Retinendo signa art. 5, designandoque per m' errorem medium obseruationum correctarum, erit

$$m'm' = \int x'x'\varphi' x' . dx' = \int (x-k)^2 \varphi x . dx = \int xx\varphi x . dx$$
$$- 2k\int x\varphi x . dx + kk\int \varphi x . dx = mm - 2kk + kk = mm - kk.$$

Si autem loco partis constantis veri k quantitas alia l ab obseruationibus ablata esset, quadratum erroris medii noui euaderet $= mm - 2kl + ll = m'm' + (l-k)^2$.

9.

Denotante λ coëfficientem determinatum, atque μ valorem integralis $\int \varphi x \,.\, dx$ ab $x = -\lambda m$ vsque ad $x = +\lambda m$, erit μ probabilitas, quod error alicuius obſeruationis ſit minor quam λm (ſine reſpectu ſigni), nec non $1-\mu$ probabilitas erroris maioris quam λm. Si itaque valor $\mu = \frac{1}{2}$ reſpondet valori $\lambda m = \rho$, error aeque facile infra ρ quam ſupra ρ cadere poteſt, quocirca ρ commode dici poteſt error *probabilis*. Relatio quantitatum λ, μ manifeſto pendet ab indole functionis φx, quae plerumque incognita eſt. Operae itaque pretium erit, iſtam relationem pro quibusdam caſibus ſpecialibus propius conſiderare.

I. Si limites omnium errorum poſſibilium ſunt $-a$ et $+a$, omnesque errores intra hos limites aeque probabiles, erit φx inter limites $x = -a$ et $x = +a$ conſtans, et proin $= \frac{1}{2a}$. Hinc $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, nec non $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ non maior quam $\sqrt{3}$; denique $\rho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\, m$, probabilitasque, quod error prodeat errore medio non maior, erit $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Si vt antea $-a$ et $+a$ ſunt errorum poſſibilium limites, errorumque ipſorum probabilitas inde ab errore 0 vtrimque in progreſſione arithmetica decreſcere ſupponitur, erit

$$\varphi x = \frac{a-x}{aa}, \text{ pro valoribus ipſius } x \text{ inter } 0 \text{ et } +a$$

$$\varphi x = \frac{a+x}{aa}, \text{ pro valoribus ipſius } x \text{ inter } 0 \text{ et } -a.$$

Hinc deducitur $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda\lambda$, quamdiu λ eſt inter 0 et $\sqrt{6}$, denique $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{(6 - 6\mu)}$, quamdiu μ inter 0 et 1, et proin

$$\rho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\, m$$

Probabilitas erroris medium non ſuperantis erit in hoc caſu $= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0{,}6498299$.

III. Si functionem φx proportionalem ſtatuimus huic $e^{-\frac{xx}{hh}}$ (quod quidem in rerum natura proxime tantum verum eſſe poteſt), eſſe debebit

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{h\sqrt{\pi}}$$

denotante π ſemiperipheriam circuli pro radio 1, vnde porro deducimus

$$m = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(V. *Disquiſ. generales circa ſeriem infinitam* etc. art. 28.). Porro ſi valor integralis

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-zz}\,dz$$

a $z = 0$ inchoati denotatur per Θz, erit

$$\mu = \Theta(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

Tabula ſequens exhibet aliquot valores huius quantitatis:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1.2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3.2918301	0.999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Quanquam relatio inter λ et μ ab indole functionis φx pendet, tamen quaedam generalia ſtabilire licet. Scilicet qualiscunque ſit haec functio, ſi modo ita eſt comparata, vt ipſius valor, creſcente valore abſoluto ipſius x, ſemper decreſcat, vel ſaltem non creſcat, certo erit

λ minor vel ſaltem non maior quam $\mu\sqrt{3}$, quoties μ eſt minor quam $\frac{2}{3}$;

λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$, quoties μ eſt maior quam $\frac{2}{3}$

Pro $\mu = \frac{2}{3}$ vterque limes coincidit, puta λ nequit eſſe maior quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Vt hoc inſigne theorema demonſtremus, denotemus per y valorem integralis $\int \varphi z \, . \, dz$ a $z = -x$ vsque ad $z = +x$ extenſi, quo pacto y erit probabilitas, quod error aliquis contentus ſit intra limites $-x$ et $+x$. Porro ſtatuamus

$$x = \psi y, \; d\psi y = \psi' y \, . \, dy, \; d\psi' y = \psi'' y \, . \, dy$$

Erit itaque $\psi 0 = 0$, nec non

$$\psi' y = \frac{1}{\varphi x + \varphi(-x)}$$

quare per hyp. $\psi' y$ ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$ ſemper creſcet, ſaltem nullibi decreſcet, ſiue, quod idem eſt, valor ipſius $\psi'' y$ ſemper erit poſitiuus, vel ſaltem non negatiuus. Porro habemus $d . y\psi' y = \psi' y . dy + y\psi'' y . dy$, adeoque

$$y\psi' y - \psi y = \int y\psi'' y \, . \, dy$$

integratione ab $y = 0$ inchoata. Valor expreſſionis $y\psi' y - \psi y$ itaque ſemper erit quantitas poſitiua, ſaltem non negatiua, adeoque

$$1 - \frac{\psi y}{y\psi' y}$$

quantitas poſitiua vnitate minor. Sit f eius valor pro $y = \mu$, i. e. quum habeatur $\psi \mu = \lambda m$, ſit

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\psi' \mu} \text{ ſiue } \psi' \mu = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}$$

His ita praeparatis, conſideremus functionem ipſius y hanc

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}(y - \mu f)$$

quam ſtatuemus $= Fy$, nec non $dFy = F'y . dy$. Perſpicuum eſt fieri

$$F\mu = \lambda m = \psi\mu$$

$$F'\mu = \frac{\lambda\mu}{(1-f)\mu} = \psi'\mu$$

Quare quum $\psi' y$, aucta ipsa y, continuo crescat (saltem non decrescat, quod semper subintelligendum), $F' y$ vero constans sit, differentia $\psi' y - F' y = \frac{d(\psi y - F y)}{d y}$ erit positiua pro valoribus ipsius y maioribus quam μ, negatiua pro minoribus. Hinc facile colligitur, $\psi y - F y$ semper esse quantitatem positiuam, adeoque ψy semper erit absolute maior, saltem non minor, quam $F y$, certe quamdiu valor ipsius $F y$ est positiuus, i. e. ab $y = \mu f$ vsque ad $y = 1$. Hinc valor integralis $\int (F y)^2 d y$ ab $y = \mu f$ vsque ad $y = 1$ erit minor valore integralis $\int (\psi y)^2 d y$ inter eosdem limites, adeoque a potiori minor valore huius integralis ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$, qui fit $= m m$. At valor integralis prioris inuenitur

$$= \frac{\lambda\lambda m m (1 - \mu f)^3}{3\mu\mu(1 - f)^2}$$

vnde colligimus, $\lambda\lambda$ esse minorem quam $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, vbi f est quantitas inter 0 et 1 iacens. Iam valor fractionis $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, cuius differentiale, si $= f$ tamquam quantitas variabilis consideratur, fit $=$

$$-\frac{3\mu\mu(1-f)}{(1-\mu f)^4} \cdot (2 - 3\mu + \mu f) d f$$

continuo decrescit, dum f a valore 0 vsque ad valorem 1 transit, quoties μ minor est quam $\frac{2}{3}$, adeoque valor maximus possibilis erit is qui valori $f = 0$ respondet, puta $= 3\mu\mu$, ita vt in hoc casu λ certo fiat minor vel non maior quam $\mu\sqrt{3}$. *Q. E. P.* Contra quoties μ maior est quam $\frac{2}{3}$, valor istius fractionis erit maximus pro $2 - 3\mu + \mu f = 0$, i. e. pro $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, vnde ille fit

$=\frac{4}{9(1-\mu)}$, adeoque in hoc casu λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$. Q. E. S.

Ita e. g. pro $\mu=\frac{1}{2}$ certo λ nequit esse maior quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, i. e. error probabilis superare nequit limitem $0{,}8660254\,m$, cui in exemplo primo art. 9. aequalis inuentus est. Porro facile e theoremate nostro concluditur, μ non esse minorem quam $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ minor sit quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, contra μ non esse minorem quam $1-\frac{4}{9\lambda\lambda}$, pro valore ipsius λ maiori quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

11.

Quum plura problemata infra tractanda etiam cum valore integralis $\int x^4 \varphi x.\mathrm{d}x$ nexa sint, operae pretium erit, eum pro quibusdam casibus specialibus euoluere. Denotabimus valorem huius integralis ab $x=-\infty$ vsque ad $x=+\infty$ extensi per n^4.

I. Pro $\varphi x=\frac{1}{2a}$, quatenus x inter $-a$ et $+a$ continetur, habemus $n^4=\frac{1}{5}a^4=\frac{9}{5}m^4$.

II. In casu secundo art. 6, vbi $\varphi x=\frac{a\mp x}{aa}$, pro valoribus ipsius x inter 0 et $\pm a$, fit $n^4=\frac{1}{15}a^4=\frac{12}{5}m^4$.

III. In casu tertio vbi

$$\varphi x=\frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{a\sqrt{\pi}}$$

inuenitur per ea, quae in commentatione supra citata exponuntur, $n^4=\frac{3}{4}h^4=3m^4$.

Ceterum demonstrari potest, valorem ipsius $\frac{n^4}{m^4}$ certo non esse minorem quam $\frac{9}{5}$, si modo suppositio art. praec. locum habeat.

12.

Denotantibus x, x', x'' etc. indefinite errores obseruationum eiusdem generis ab inuicem independentes, quorum probabilitates relatiuas exprimit praefixa characteristica φ; nec non y functionem datam rationalem indeterminatarum x, x', x'' etc.: integrale multiplex (I)

$$\int \varphi x . \varphi' x . \varphi'' x \ldots\ldots dx . dx' . dx'' \ldots .$$

extensum per omnes valores indeterminatarum x, x', x'', pro quibus valor ipsius y cadit intra limites datos o et η, exprimet probabilitatem valoris ipsius y indefinite intra o et η siti. Manifesto hoc integrale erit functio ipsius η, cuius differentiale statuemus $= \psi \eta . d\eta$, ita vt integrale ipsum fiat aequale integrali $\int \psi \eta . d\eta$ ab $\eta = o$ incepto. Hoc pacto simul characteristica $\psi \eta$ probabilitatem relatiuam cuiusuis valoris ipsius y exprimere censenda est. Quum x considerari possit tamquam functio indeterminatarum y, x', x'' etc., quam statuemus

$$= f(y, x', x'' \ldots .)$$

integrale (I) fiet

$$= \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{d f(y, x', x'' \ldots .)}{dy} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots dy . dx' . dx'' \ldots$$

vbi y extendi debet ab $y = o$ vsque ad $y = \eta$, indeterminatae reliquae vero per omnes valores, quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots .)$. Hinc colligitur

$$\psi y = \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{d f(y, x', x'' \ldots .)}{dy} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots dx' . dx'' \ldots .$$

integratione, in qua y tamquam constans considerari debet, extensa per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., qui ipsi $f(y, x', x'' \ldots .)$ valorem realem conciliant.

13.

Ad hanc integrationem reipsa exsequendam cognitio functionis φ requireretur, quae plerumque incognita est: quinadeo, etiamsi haec functio cognita esset, in plerisque casibus integratio vires analyseos superaret. Quae quum ita sint, probabilitatem quidem singulorum valorum ipsius y assignare non poterimus: at secus res se habebit, si tantummodo desideratur valor medius ipsius y, qui oritur ex integratione $\int y\,\psi y\,.\,dy$ per omnes valores ipsius y, quos quidem assequi potest, extensa. Et quum manifesto pro omnibus valoribus, quos y assequi nequit, vel per naturam functionis quam exprimit (e. g. pro negatiuis, si esset $y = xx + x'x' + x''x'' +$ etc.), vel ideo quod erroribus ipsis x, x', x'' etc. certi limites sunt positi, statuere oporteat $\psi y = 0$, manifesto res perinde se habebit, si integratio illa extendatur per omnes valores reales ipsius y, puta ab $y = -\infty$ vsque ad $y = +\infty$. Iam integrale $\int y\,\psi y\,.\,dy$ inter limites determinatos, puta ab $y = \eta$ vsque ad $y = \eta'$ sumtum aequale est integrali

$$\int y\,\varphi\,.\,f(y, x', x''\ldots\ldots)\frac{df(y, x', x''\ldots\ldots)}{dy}\,.\,\varphi x'\,.\,\varphi x''\ldots\ldots dy\,.\,dx'\,.\,dx''\ldots\ldots$$

integratione extensa ab $y = \eta$ vsque ad $y = \eta'$, atque per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc. quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x''\ldots\ldots)$, siue quod idem est, valori integralis

$$\int y\,\varphi x\,.\,\varphi x'\,.\,\varphi x''\ldots\ldots dx\,.\,dx'\,.\,dx''\ldots\ldots$$

adhibendo in hac integratione pro y eius valorem per x, x', x'' etc. expressum, extendendoque eam per omnes harum indeterminatarum valores, quibus respondet valor ipsius y inter η et η' situs. Hinc colligimus, integrale $\int y\,\psi y\,.\,dy$ per omnes valores ipsius y, ab $y = -\infty$ vsque ad $y = +\infty$ extensum obtineri ex integratione

$$\int y\,\varphi x\,.\,\varphi x'\,.\,\varphi x''\ldots\ldots dx\,.\,dx'\,.\,dx''\ldots\ldots$$

per omnes valores reales ipsarum x, x', x'' etc. extensa, puta ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ vsque ad $x' = +\infty$ etc.

14.

Reducta itaque functione y ad formam aggregati talium partium

$$A\,x^\alpha\,x'^\beta\,x''^\gamma\ldots\ldots$$

valor integralis $\int y \psi y \,.\, dy$ per omnes valores ipſius y extenſi, ſeu valor medius ipſius y, aequalis erit aggregato partium

$$A \times \int x^{\alpha} \varphi x \,.\, dx \times \int x'^{\beta} \varphi x' \,.\, dx' \times \int x''^{\gamma} \varphi x'' \,.\, dx'' \ldots.$$

vbi integrationes extendendae ſunt ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ vsque ad $x' = +\infty$ etc.; ſiue quod eodem redit, aggregato partium quae oriuntur, dum pro ſingulis poteſtatibus x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ipſarum valores medii ſubſtituuntur, cuius theorematis grauiſſimi veritas etiam ex aliis conſiderationibus facile deriuari potuiſſet.

15.

Applicemus ea, quae in art. praec. expoſuimus, ad caſum ſpecialem, vbi

$$y = \frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

denotante σ multitudinem partium in numeratore. Valor medius ipſius y hic illico inuenitur $= mm$, accipiendo characterem m in eadem ſignificatione vt ſupra. Valor verus quidem ipſius y in caſu determinato maior minorue euadere poteſt medio, perinde ac valor verus termini ſimplicis xx: ſed probabilitas quod valor fortuitus ipſius y a medio mm haud ſenſibiliter aberret, continuo magis ad certitudinem appropinquabit creſcente multitudine σ. Quod quo clarius eluceat, quum probabilitatem ipſam exacte determinare non ſit in poteſtate, inueſtigemus errorem medium metuendum, dum ſupponimus $y = mm$. Manifeſto per principia art. 6. hic error erit radix quadrata valoris medii functionis

$$\left(\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma} - mm\right)^2$$

ad quem eruendum ſufficit obſeruare, valorem medium termini talis $\frac{x^4}{\sigma\sigma}$ eſſe $= \frac{n^4}{\sigma\sigma}$ (vtendo charactere n in ſignificatione art. 11.), valorem medium autem termini talis $\frac{2\,xxx'x'}{\sigma\sigma}$ fieri $= \frac{2\,m^4}{\sigma\sigma}$, vnde facillime deducitur valor medius istius functionis

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

Hinc discimus, si copia satis magna errorum fortuitorum ab inuicem independentium x, x', x'' etc. in promtu sit, magna certitudine inde peti posse valorem approximatum ipsius m per formulam

$$m = \sqrt{\frac{(xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.})}{\sigma}}$$

erroremque medium in hac determinatione metuendum, respectu quadrati mm, esse

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

Ceterum, quum posterior formula implicet quantitatem n, si id tantum agitur, vt idea qualiscunque de gradu praecisionis istius determinationis formari possit, sufficiet, aliquam hypothesin respectu functionis φ amplecti. E. g. in hypothesi tertia art. 9, 11. iste error fit $= mm\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Quod si minus arridet, valor approximatus ipsius n^4 ex ipsis erroribus adiumento formulae

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

peti poterit. Generaliter autem affirmare possumus, praecisionem duplicatam in ista determinatione requirere errorum copiam quadruplicatam, siue pondus determinationis ipsi multitudini σ esse proportionale.

Prorsus simili modo, si obseruationum errores partem constantem inuoluunt, huius valor approximatus eo tutius e medio arithmetico multorum errorum colligi poterit, quo maior horum multitudo fuerit. Et quidem error medius in hac determinatione metuendus exprimetur per

$\sqrt{mm}$

$$\sqrt{\frac{mm-kk}{\sigma}}$$

fi k defignat partem conftantem ipfam atque m errorem medium obferuationum parte conftante nondum purgatarum, fiue fimpliciter per $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, fi m denotat errorem medium obferuationum a parte conftante liberatarum (v. art. 8.).

16.

In artt. 12—15. fuppofuimus, errores x, x', x'' etc. ad idem obferuationum genus pertinere, ita vt fingulorum probabilitates per eandem functionem exprimantur. Sed fponte patet, difquifitionem generalem artt. 12—14 aeque facile ad cafum generaliorem extendi, vbi probabilitates errorum x, x', x'' etc. per functiones diuerfas φx, $\varphi' x'$, $\varphi'' x''$ etc. exprimantur, i. e. vbi errores illi pertineant ad obferuationes praecifionis feu incertitudinis diuerfae. Supponamus, x effe errorem obferuationis talis, cuius error medius metuendus fit $= m$; nec non x', x'' etc. effe errores aliarum obferuationum, quarum errores medii metuendi refp. fint m', m'' etc. Tunc valor medius aggregati $xx + x'x' + x''x'' +$ etc. erit $mm + m'm' + m''m'' +$ etc. Iam fi aliunde conftat, quantitates m, m', m'' etc. effe in ratione data, puta numeris 1, μ', μ'' etc. refp. proportionales, valor medius expreffionis

$$\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

erit $= mm$. Si vero valorem eiusdem expreffionis determinatum, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipfi mm aequalem ponimus, error medius, cui haec determinatio obnoxia manet, fimili ratione vt in art. praec. inuenitur

$$= \frac{\sqrt{(n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

vbi n', n'' etc. refpectu obferuationum, ad quas pertinent errores

x', x'' etc., idem denotare supponuntur, atque n respectu obseruationis primae. Quodsi itaque numeros n, n', n'' etc. ipsis m, m', m'' etc. proportionales supponere licet, error ille metuendus medius fit

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4)} . \sqrt{(1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

At haecce ratio, valorem approximatum ipsius m determinandi, non est ea, quae maxime ad rem facit. Quod quo clarius ostendamus, consideremus expressionem generaliorem

$$y = \frac{xx + \alpha' x' x' + \alpha'' x'' x'' + \text{etc.}}{1 + \alpha' \mu' \mu' + \alpha'' \mu'' \mu'' + \text{etc.}}$$

cuius valor medius quoque erit $= mm$, quomodocunque eligantur coëfficientes α', α'' etc. Error autem medius metuendus, dum valorem determinatum ipsius y, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipsi mm aequalem supponimus, inuenitur per principia supra tradita

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4 + \alpha'\alpha'(n'^4 - m'^4) + \alpha''\alpha''(n''^4 - m''^4) + \text{etc.})}}{1 + \alpha' \mu' \mu' + \alpha'' \mu'' \mu'' + \text{etc.}}$$

Vt hic error medius fiat quam minimus, statuere oportebit

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} . \mu' \mu'$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} . \mu'' \mu'' \text{ etc.}$$

Manifesto hi valores euolui nequeunt, nisi insuper ratio quantitatum n, n', n'' etc. ad m, m', m'' etc. aliunde nota fuerit; qua cognitione exacta deficiente, saltem tutissimum videtur *), illas his proportionales supponere (v. art. 11), vnde prodeunt valores

*) Scilicet cognitionem quantitatum μ', μ'' etc. in eo solo casu in potestate esse concipimus, vbi per rei naturam errores x, x', x'' etc. ipsis 1, μ', μ'' etc. proportionales, aeque probabiles censendi sunt, aut potius vbi

$$\varphi x = \mu' \varphi'(\mu' x) = \mu'' \varphi''(\mu'' x) \text{ etc.}$$

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'\mu'}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''\mu''} \text{ etc.}$$

i. e. coëfficientes α', α'' etc. aequales ſtatui debent ponderibus relatiuis obſeruationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., aſſumto pondere obſeruationis, ad quam pertinet error x, pro vnitate. Hoc pacto, deſignante vt ſupra σ multitudinem errorum propoſitorum, habebimus valorem medium expreſſionis

$$\frac{xx + \alpha'x'x' + \alpha''x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= mm$, atque errorem medium metuendum, dum valorem fortuito determinatum huius expreſſionis pro valore vero ipſius mm adoptamus

$$\frac{\sqrt{(n^4 + \alpha'\alpha'n'^4 + \alpha''\alpha''n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4)}}{\sigma}$$

et proin, ſiquidem licet, ipſas n, n', n'' etc. ipſis m, m', m'' proportionales ſupponere,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

quae formula identica eſt cum ea, quam ſupra pro caſu obſeruationum eiusdem generis inueneramus.

17.

Si valor quantitatis, quae ab alia quantitate incognita pendet, per obſeruationem praeciſione abſoluta non gaudentem determinata eſt, valor incognitae hinc calculatus etiam errori obnoxius erit, ſed nihil in hac determinatione arbitrio relinquitur. At ſi *plures* quantitates ab eadem incognita pendentes per obſeruationes haud abſolute exactas innotuerunt, valorem incognitae vel per quamlibet harum obſeruationum eruere poſſumus, vel per aliquam plurium obſeruationum combinationem, quod infinitis modis diuerſis fieri poteſt. Quamquam vero valor incognitae tali modo prodiens errori ſemper obnoxius manet, tamen in alia combinatione maior, in alia minor error metuendus erit. Similiter res se habebit, si plures quantitates a pluribus incognitis simul pendentes sunt obseruatae: prout obseruationum multitudo multitudini incognitarum vel aequalis, vel hac minor vel maior fuerit, problema vel determinatum, vel indeterminatum, vel plus quam determinatum erit (generaliter saltem loquendo), et in casu tertio ad incognitarum determinationem obseruationes infinitis modis diuersis combinari poterunt. E tali combinationum varietate eas eligere, quae maxime ad rem faciant, i. e. quae incognitarum valores erroribus minimis obnoxios suppeditent, problema sane est in applicatione matheseos ad philosophiam naturalem longe grauissimum.

In Theoria motus corporum coelestium ostendimus, quomodo valores incognitarum *maxime probabiles* eruendi sint, si lex probabilitatis errorum obseruationum cognita sit; et quum haec lex natura sua in omnibus fere casibus hypothetica maneat, theoriam illam ad legem maxime plausibilem applicauimus, vbi probabilitas erroris x quantitati exponentiali e^{-hhxx} proportionalis supponitur, vnde methodus a nobis dudum in calculis praesertim astronomicis, et nunc quidem a plerisque calculatoribus sub nomine methodi quadratorum minimorum vsitata demanauit.

Postea ill. Laplace, rem alio modo aggressus, idem principium omnibus aliis etiamnum praeferendum esse docuit, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, si modo obseruationum multitudo sit permagna. At pro multitudine obseruationum modica, res intacta mansit, ita vt si lex nostra hypothetica respuatur, methodus quadratorum minimorum eo tantum nomine prae aliis commendabilis habenda sit, quod calculorum concinnitati maxime est adaptata.

Geometris itaque gratum fore speramus, si in hac noua argumenti tractatione docuerimus, methodum quadratorum minimorum exhibere combinationem ex omnibus optimam, non quidem proxime, ſed abſolute, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, quaecunque obſeruationum multitudo, ſi modo notionem erroris medii non ad mentem ill. Laplace, ſed ita vt in artt. 5 et 6 a nobis factum eſt ſtabiliamus.

Ceterum expreſſis verbis hic praemonere conuenit, in omnibus disquiſitionibus ſequentibus tantummodo de erroribus irregularibus atque a parte conſtante liberis ſermonem eſſe, quum proprie ad perfectam artem obſeruandi pertineat, omnes errorum conſtantium cauſſas ſummo ſtudio amouere. Quaenam vero ſubſidia calculator tales obſeruationes tractare ſuſcipiens, quas ab erroribus conſtantibus non liberas eſſe iuſta ſuſpicio adeſt, ex ipſo calculo probabilium petere poſſit, disquiſitioni peculiari alia occaſione promulgandae reſeruamus.

18.

PROBLEMA.

Deſignante U functionem datam quantitatum incognitarum V, V', V'' etc., quaeritur error medius M in determinatione valoris ipſius U metuendus, ſi pro V, V', V'' etc. adoptentur non valores veri, ſed ii, qui ex obſeruationibus ab inuicem independentibus, erroribus mediis m, m', m'' etc. reſp. obnoxiis prodeunt.

Sol. Denotatis erroribus in valoribus obſeruatis ipſarum V, V', V'' etc. per e, e', e'' etc., error inde redundans in valorem ipſius U exprimi poterit per functionem linearem

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = E$$

vbi λ, λ', λ'' etc. ſunt valores quotientium differentialium $\frac{dU}{dV}$, $\frac{dU}{dV'}$, $\frac{dU}{dV''}$ etc. pro valoribus veris ipſarum V, V', V'' etc., ſiquidem obſeruationes ſatis exactae ſunt, vt errorum quadrata productaque negligere liceat. Hinc primo fequitur, quoniam obferuationum errores a partibus conftantibus liberi fupponuntur, valorem medium ipfius E effe $= 0$. Porro error medius in valore ipfius U metuendus, erit radix quadrata e valore medio ipfius EE, fiue MM erit valor medius aggregati

$$\lambda\lambda ee + \lambda'\lambda'e'e' + \lambda''\lambda''e''e'' + \text{etc.} + 2\lambda\lambda'ee' + 2\lambda\lambda''ee'' + 2\lambda'\lambda''e'e'' + \text{etc.}$$

At valor medius ipfius $\lambda\lambda ee$ fit $\lambda\lambda mm$, valor medius ipfius $\lambda'\lambda'e'e'$ fit $= \lambda'\lambda'm'm'$ etc.; denique valores medii productorum $2\lambda\lambda'ee'$ etc. omnes fiunt $= 0$. Hinc itaque colligimus

$$M = \sqrt{}(\lambda\lambda mm + \lambda'\lambda'm'm' + \lambda''\lambda''m''m'' + \text{etc.})$$

Huic folutioni quasdam annotationes adiicere conueniet.

I. Quatenus fpectando obferuationum errores tanquam quantitates primi ordinis, quantitates ordinum altiorum negliguntur, in formula noftra pro λ, λ' λ'' etc. etiam valores eos quotientium $\frac{dU}{dV}$ etc. adoptare licebit, qui prodeunt e valoribus obferuatis quantitatum V, V', V'' etc. Quoties U eft functio linearis, manifefto nulla prorfus erit differentia.

II. Si loco errorum mediorum obferuationum, harum pondera introducere malumus, fint haec, fecundum vnitatem arbitrariam, refp. p, p', p'' etc., atque P pondus determinationis valoris ipfius U e valoribus obferuatis quantitatum V, V', V'' etc. prodeuntis. Ita habebimus

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda\lambda}{p} + \frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \text{etc.}}$$

III. Si T eft functio alia data quantitatum V, V', V'' etc. atque, pro harum valoribus veris,

$$\frac{dT}{dV} = x,\ \frac{dT}{dV'} = x',\ \frac{dT}{dV''} = x'' \text{ etc.}$$

error in determinatione valoris ipsius T, e valoribus obseruatis ipsarum V, V', V'' etc. petita, erit $= xe + x'e' + x''e'' +$ etc., $= E'$, atque error medius in ista determinatione metuendus $= \surd(xxmm + x'x'm'm' + x''x''m''m'' + \text{etc.})$. Errores E, E' vero manifesto ab inuicem iam non erunt independentes, valorque medius producti EE', secus ac valor medius producti ee', non erit $= 0$, sed $= x\lambda mm + x'\lambda'm'm' + x''\lambda''m''m'' +$ etc.

IV. Problema nostrum etiam ad casum eum extendere licet, vbi valores quantitatum V, V', V'' etc. non immediate per obseruationes inueniuntur, sed quomodocunque ex obseruationum combinationibus deriuantur, si modo singularum determinationes ab inuicem sunt independentes, i. e. obseruationibus diuersis superstructae: quoties autem haec conditio locum non habet, formula pro M erronea euaderet. E. g. si vna alteraue obseruatio, quae ad determinationem valoris ipsius V inseruiit, etiam ad valorem ipsius V' determinandum adhibita esset, errores e et e' haud amplius ab inuicem independentes forent, neque adeo producti ee' valor medius $= 0$. Si vero in tali casu nexus quantitatum V, V' cum obseruationibus simplicibus, e quibus deductae sunt, rite perpenditur, valor medius producti ee' adiumento annotationis III. assignari, atque sic formula pro M completa reddi poterit.

19.

Sint V, V', V'' etc. functiones incognitarum x, y, z etc., multitudo illarum $= \pi$, multitudo incognitarum $= \rho$, supponamusque, per obseruationes vel immediate vel mediate valores functionum inuentos esse $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc., ita tamen vt hae determinationes ab inuicem fuerint independentes. Si ρ maior est quam π, incognitarum euolutio manifesto fit problema indeterminatum; si ρ ipsi π aequalis est, singulae x, y, z etc. in formam functionum ipsarum V, V', V'' etc. redigi vel redactae concipi possunt, ita vt ex harum valoribus obseruatis valores istarum inueniri possint, simulque adiumento art. praec. praecisionem relatiuam singulis his determinationibus tribuendam assignare liceat; denique si ϱ minor est quam π, singulae x, y, z etc. infinitis modis diuersis in formam functionum ipsarum V, V' V'' etc. redigi, adeoque illarum valores infinitis modis diuersis erui poterunt. Quae determinationes exacte quidem quadrare deberent, si obseruationes praecisione absoluta gauderent; quod quum secus se habeat, alii modi alios valores suppeditabunt, nec minus determinationes e combinationibus diuersis petitae inaequali praecisione instructae erunt.

Ceterum si in casu secundo vel tertio functiones V, V', V'' etc. ita comparatae essent, vt $\pi - \varrho + 1$ ex ipsis, vel plures, tamquam functiones reliquarum spectare liceret, problema respectu posteriorum functionum etiamnum plus quam determinatum esset, respectu incognitarum x, y, z etc. autem indeterminatum; harum scilicet valores ne tunc quidem determinare liceret, quando valores functionum V, V', V'' etc. absolute exacti dati essent: sed hunc casum a disquisitione nostra excludemus.

Quoties V, V', V'' etc. per se non sunt functiones *lineares* indeterminatarum suarum, hoc efficietur, si loco incognitarum primitiuarum introducuntur ipsarum differentiae a valoribus approximatis, quos aliunde cognitos esse supponere licet. Errores medios in determinationibus $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. metuendos resp. denotabimus per m, m', m'' etc., determinationumque pondera per p, p', p'' etc., ita vt sit $pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc. Rationem, quam inter se tenent errores medii, cognitam supponemus, ita vt pondera, quorum vnum ad lubitum accipi potest, sint nota. Denique statuemus

$(V - L)\sqrt{p} = v$, $(V' - L')\sqrt{p'} = v'$, $(V'' - L'')\sqrt{p''} = v''$ etc.
Manifesto itaque res perinde se habebit, ac si obseruationes immedia-

mediatae, aequali praecisione gaudentes, puta quarum error medius $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc., siue quibus pondus $= 1$ tribuitur, suppeditauissent

$$v = 0,\ v' = 0,\ v'' = 0 \text{ etc.}$$

20.

P R O B L E M A.

Designantibus v, v', v'' etc. functiones lineares indeterminatarum x, y, z etc. sequentes

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

ex omnibus systematibus coëfficientium $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc., qui indefinite dant

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

ita vt k sit quantitas determinata i. e. ab x, y, z etc. independens, eruere id, pro quo $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' +$ etc. nanciscatur valorem minimum.

Solutio. Statuamus

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

etc.: eruntque etiam ξ, η, ζ etc. functiones lineares ipsarum x, y, z etc., puta

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma aa + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma bb + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma cc + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(vbi Σaa denotat aggregatum $aa + a'a' + a''a'' +$ etc., ac perinde de reliquis).

multitudoque ipsarum ξ, η, ζ etc. multitudini indeterminatarum x, y, z etc. aequalis, puta $= \pi$. Per eliminationem itaque elici poterit aequatio talis *)

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}$$

in qua substituendo pro ξ, η, ζ etc. valores earum ex III, aequatio identica prodire debet. Quare statuendo

$$\left.\begin{array}{l} a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha \\ a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha' \\ a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha'' \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{(IV)}$$

necessario erit indefinite

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A \quad \text{(V)}$$

Haec aequatio docet, inter systemata valorum coëfficientium $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. certo etiam referendos esse hos $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc., nec non, pro systemate quocunque, fieri debere indefinite

$$(\varkappa - \alpha)v + (\varkappa' - \alpha')v' + (\varkappa'' - \alpha'')v'' + \text{etc.} = A - k$$

quae aequatio implicat sequentes

$$(\varkappa - \alpha)a + (\varkappa' - \alpha')a' + (\varkappa'' - \alpha'')a'' + \text{etc.} = 0$$

$$(\varkappa - \alpha)b + (\varkappa' - \alpha')b' + (\varkappa'' - \alpha'')b'' + \text{etc.} = 0$$

$$(\varkappa - \alpha)c + (\varkappa' - \alpha')c' + (\varkappa'' - \alpha'')c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando has aequationes resp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc., et addendo, obtinemus propter (IV)

$$(\varkappa - \alpha)\alpha + (\varkappa' - \alpha')\alpha' + (\varkappa'' - \alpha'')\alpha'' + \text{etc.} = 0$$

sive quod idem est

$$\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.} = \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.}$$
$$+ (\varkappa - \alpha)^2 + (\varkappa' - \alpha')^2 + (\varkappa'' - \alpha'')^2 + \text{etc.}$$

unde patet, aggregatum $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}$ valorem minimum obtinere, si statuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. *Q. E. I.*

---

*) Ratio, cur ad denotandos coëfficientes e tali eliminatione prodeuntes, hos potissimum characteres elegerimus, infra elucebit.

Ceterum hic valor minimus ipse sequenti modo eruitur. Aequatio (V) docet esse

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} = 1$$
$$\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \text{etc.} = 0$$
$$\alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando has aequationes resp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. et addendo, protinus habemus adiumento aequationum (IV)

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} = [\alpha\alpha],$$

21.

Quum obseruationes suppeditauerint aequationes (proxime veras) $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., ad valorem incognitae x inde eliciendum, combinatio illarum aequationum talis

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = 0$$

adhibenda est, quae ipsi x coëfficientem 1 conciliet, incognitasque reliquas y, z etc. eliminet; cui determinationi per art. 18. pondus

$$= \frac{1}{\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}}$$

tribuendum erit. Ex art. praec. itaque sequitur, determinationem maxime idoneam eam fore, vbi statuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. Hoc pacto x obtinet valorem A, manifestoque idem valor etiam (absque cognitione multiplicatorum α, α', α'' etc.) protinus per eliminationem ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. elici potest. Pondus huic determinationi tribuendum erit $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, siue error medius in ipsa metuendus

$$= m\sqrt{p[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Prorsus simili modo determinatio maxime idonea incognitarum reliquarum y, z etc. eosdem valores ipsis conciliabit, qui per eliminationem ex iisdem aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. prodeunt.

Denotando aggregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc., siue quod idem est hoc

$$p(V-L)^2 + p'(V'-L')^2 + p''(V''-L'')^2 + \text{etc.}$$

per Ω, patet, 2ξ, 2η, 2ζ etc. esse quotientes differentiales partiales functionis Ω, puta

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx},\quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy},\quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \text{ etc.}$$

Quapropter valores incognitarum ex obseruationum combinatione maxime idonea prodeuntes, quos *valores maxime plausibiles* commode vocare possumus, identici erunt cum iis, per quos Ω valorem minimum obtinet. Iam $V - L$ indefinite exprimit differentiam inter valorem computatum et obseruatum. Valores itaque incognitarum maxime plausibiles iidem erunt, qui summam quadratorum differentiarum inter quantitatum V, V', V'' etc. valores obseruatos et computatos, per obseruationum pondera multiplicatorum, minimam efficiunt, quod principium in *Theoria Motus Corporum Coelestium* longe alia via stabiliueramus. Et si insuper praecisio relatiua singularum determinationum assignanda est, per eliminationem indefinitam ex aequationibus (III) ipsas x, y, z etc. in tali forma exhibere oportet:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}\\ y &= B + [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.}\\ z &= C + [\gamma\alpha]\xi + [\gamma\beta]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$
$$\text{etc.}$$

quo pacto valores maxime plausibiles incognitarum x, y, z etc. erunt resp. A, B, C etc., atque pondera his determinationibus tribuenda $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., siue errores medii in ipsis metuendi

pro x......$m\sqrt{p[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''[\alpha\alpha]}$ etc.

pro y......$m\sqrt{p[\beta\beta]} = m'\sqrt{p'[\beta\beta]} = m''\sqrt{p''[\beta\beta]}$ etc.

pro z......$m\sqrt{p[\gamma\gamma]} = m'\sqrt{p'[\gamma\gamma]} = m''\sqrt{p''[\gamma\gamma]}$ etc.

etc.

quod conuenit cum iis, quae in *Theoria Motus Corporum Coelestium* docuimus.

22.

De casu omnium simplicissimo, simul vero frequentissimo, vbi vnica incognita adest, atque $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc., paucis seorsim agere conueniet. Erit scilicet $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., et proin

$$\xi = (p + p' + p'' + \text{etc.})\,x - (pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.})$$

Hinc porro

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

Si itaque e pluribus obseruationibus inaequali praecisione gaudentibus, et quarum pondera resp. sunt p, p', p'' etc., valor eiusdem quantitatis inuentus est e prima $= L$, e secunda $= L'$, e tertia $= L''$ etc., huius valor maxime plausibilis erit

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

pondusque huius determinationis $= p + p' + p''$ etc. Si omnes obſeruationes aequali praeciſione gaudent, valor maxime plauſibilis erit

$$= \frac{L + L' + L'' + \text{etc.}}{\pi}$$

i. e. aequalis medio arithmetico valorum obſeruatorum, huiusque determinationis pondus $= \pi$, accepto pondere obſeruationum pro vnitate.

3(a)

THEORIA COMBINATIONIS OBSERVATIONUM ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

PARS POSTERIOR.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA FEBR. 2, 1823.

23.

ı adhuc fuperfunt difquifitiones, per quas theoria praeco-
ım illuftrabitur tum ampliabitur.

ınte omnia inueftigare oportet, num negotium eliminatio-
ıius adiumento indeterminatae x, y, z etc. per ξ, η, ζ etc.
ıendae funt, femper fit poffibile. Quum multitudo illarum
udini harum aequalis fit, e theoria eliminationis in aequa-
ıs linearibus conftat, illam eliminationem, fi ξ, η, ζ etc.
ıicem independentes fint, certo poffibilem fore; fin minus,
ibilem. Supponamus aliquantifper, ξ, η, ζ etc. non effe ab
u independentes, fed exftare inter ipfas aequationem
ım

$$o = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

mus itaque

$$F\Sigma aa + G\Sigma ab + H\Sigma ac + \text{etc.} = o$$
$$F\Sigma ab + G\Sigma bb + H\Sigma bc + \text{etc.} = o$$
$$F\Sigma ac + G\Sigma bc + H\Sigma cc + \text{etc.} = o$$

es non

$$F\Sigma al + G\Sigma bl + H\Sigma cl + \text{etc.} = -K$$

Statuendo porro

$$\left.\begin{aligned} aF + bG + cH + \text{etc.} &= \theta \\ a'F + b'G + c'H + \text{etc.} &= \theta' \\ a''F + b''G + c''H + \text{etc.} &= \theta'' \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

etc., eruitur

$$a\theta + a'\theta' + a''\theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\theta + b'\theta' + b''\theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\theta + c'\theta' + c''\theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., nec non

$$l\theta + l'\theta' + l''\theta'' + \text{etc.} = -K$$

Multiplicando itaque aequationes (I) resp. per θ, θ', θ'' etc. et addendo, obtinemus:

$$0 = \theta\theta + \theta'\theta' + \theta''\theta'' + \text{etc.}$$

quae aequatio manifesto consistere nequit, nisi simul fuerit $\theta = 0$, $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$ etc. Hinc primo colligimus, necessario esse debere $K = 0$. Dein aequationes (I) docent, functiones v, v', v'' etc. ita comparatas esse, vt ipsarum valores non mutentur, si valores quantitatum x, y, z etc. capiant incrementa vel decrementa ipsis F, G, H etc. resp. proportionalia, idemque manifesto de functionibus V, V', V'' etc. valebit. Suppositio itaque consistere nequit, nisi in casu tali, vbi vel e valoribus exactis quantitatum V, V', V'' etc. valores incognitarum x, y, z etc. determinare impossibile fuisset, i. e. vbi problema natura sua fuisset indeterminatum, quem casum a disquisitione nostra exclusimus.

24.

Denotemus per β, β', β'' etc. multiplicatores, qui eandem relationem habent ad indeterminatam y, quam habent $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. ad x, puta sit

a[αβ]

$$a[\beta\alpha] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta$$
$$a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta'$$
$$a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta''$$

etc., ita vt fiat indefinite

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \text{etc.} = y - B$$

Perinde fint γ, γ', γ'' etc. multiplicatores fimiles refpectu indeterminatae z, puta

$$a[\gamma\alpha] + b[\gamma\beta] + c[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma$$
$$a'[\gamma\alpha] + b'[\gamma\beta] + c'[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma'$$
$$a''[\gamma\alpha] + b''[\gamma\beta] + c''[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma''$$

etc., ita vt fiat indefinite

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \text{etc.} = z - C$$

et fic porro. Hoc pacto, perinde vt iam in art. 20. inueneramus

$$\Sigma\alpha a = 1,\ \Sigma\alpha b = 0,\ \Sigma\alpha c = 0,\ \text{etc., nec non } \Sigma\alpha l = -A,$$

etiam habebimus

$$\Sigma\beta a = 0,\ \Sigma\beta b = 1,\ \Sigma\beta c = 0 \text{ etc., atque } \Sigma\beta l = -B$$
$$\Sigma\gamma a = 0,\ \Sigma\gamma b = 0,\ \Sigma\gamma c = 1 \text{ etc., atque } \Sigma\gamma l = -C$$

et fic porro. Nec minus, quemadmodum in art. 20. prodiit $\Sigma\alpha\alpha = [\alpha\alpha]$, etiam erit

$$\Sigma\beta\beta = [\beta\beta],\ \Sigma\gamma\gamma = [\gamma\gamma] \text{ etc.}$$

Multiplicando porro valores ipforum α, α', α'' etc. (art. 20. IV) refp. per β, β', β'' etc. et addendo, obtinemus

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' \text{ etc.} = [\alpha\beta], \text{ fiue } \Sigma\alpha\beta = [\alpha\beta]$$

Multiplicando autem valores ipforum β, β', β'' etc. refp. per α, α', α'' etc., et addendo, perinde prodit

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\beta\alpha], \text{ adeoque } [\alpha\beta] = [\beta\alpha]$$

Prorfus fimili modo eruitur

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma\alpha\gamma,\ [\beta\gamma] = [\gamma\beta] = \Sigma\beta\gamma \text{ etc.}$$

25.

Denotemus porro per λ, λ', λ'' etc. valores functionum v, v', v'' etc., qui prodeunt, dum pro x, y, z etc. ipfarum valores maxime plaufibiles A, B, C etc. fubftituuntur, puta

$$aA + bB + cC + \text{etc.} + l = \lambda$$
$$a'A + b'B + c'C + \text{etc.} + l' = \lambda'$$
$$a''A + b''B + c''C + \text{etc.} + l'' = \lambda''$$

etc.; ſtatuamus praeterea

$$\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.} = M$$

ita vt ſit M valor functionis Ω valoribus maxime plauſibilibus indeterminatarum reſpondens, adeoque per ea, quae in art. 20. demonſtrauimus, valor minimus huius functionis. Hinc erit $a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' +$ etc. valor ipſius ξ, valoribus $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc. reſpondens, adeoque $= 0$, i. e. habebimus

$$\Sigma a\lambda = 0$$

et perinde fiet

$$\Sigma b\lambda = 0, \quad \Sigma c\lambda = 0 \text{ etc.}; \text{ nec non } \Sigma\alpha\lambda = 0, \quad \Sigma\beta\lambda = 0, \quad \Sigma\gamma\lambda = 0 \text{ etc.}$$

Denique multiplicando expreſſiones ipſarum λ, λ', λ'' etc. per λ, λ', λ'' etc. reſp., et addendo, obtinemus $l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' +$ etc. $= \lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' +$ etc., ſiue

$$\Sigma l\lambda = M.$$

26.

Subſtituendo in aequatione $v = ax + by + cz +$ etc. $+ l$, pro x, y, z etc. expreſſiones VII. art. 21, prodibit, adhibitis reductionibus ex praecedentibus obuiis,

$$v = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} + \lambda$$

et perinde erit indefinite

$$v' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \text{etc.} + \lambda'$$
$$v'' = \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \text{etc.} + \lambda''$$

etc. Multiplicando vel has aequationes, vel aequationes I art. 20. reſp. per λ, λ', λ'' etc., et addendo, diſcimus eſſe indefinite

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \text{etc.} = M.$$

27.

Functio Ω indefinite in pluribus formis exhiberi poteſt, quas euoluere operae pretium erit. Ac primo quidem quadrando aequationes I art. 20. et addendo, ſtatim fit

$$\Omega = xx\sum aa + yy\sum bb + zz\sum cc + \text{etc.} + 2xy\sum ab$$
$$+ 2xz\sum ac + 2yz\sum bc + \text{etc.} + 2x\sum al + 2y\sum bl$$
$$+ 2z\sum cl + \text{etc.} + \sum ll$$

quae eſt forma *prima*.

Multiplicando easdem aequationes reſp. per v, v', v'' etc., et addendo, obtinemus:

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} + lv + l'v' + l''v'' + \text{etc.}$$

atque hinc, ſubſtituendo pro v, v', v'' etc. expreſſiones in art. praec. traditas,

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} - A\xi - B\eta - C\zeta - \text{etc.} + M$$

ſiue

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \text{etc.} + M$$

quae eſt forma *ſecunda*.

Subſtituendo in forma ſecunda pro $x - A$, $y - B$, $z - C$ etc. expreſſiones VII. art. 21, obtinemus formam *tertiam*:

$$\Omega = [\alpha\alpha]\xi\xi + [\beta\beta]\eta\eta + [\gamma\gamma]\zeta\zeta + \text{etc.} + 2[\alpha\beta]\xi\eta$$
$$+ 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + M.$$

His adiungi poteſt forma *quarta*, ex forma tertia, atque formulis art. praec. ſponte demanans:

$$\Omega = (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \text{etc.} + M, \text{ ſiue}$$
$$\Omega = M + \sum(v - \lambda)^2$$

quae forma conditionem minimi directe ob oculos ſiſtit.

28.

Sint e, e', e'' etc. errores in obſeruationibus, quae dederunt $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. commiſſi, i. e. ſint valores veri functionum V, V', V'' etc. reſp. $L - e$, $L' - e'$, $L'' - e''$ etc. adeoque valores veri ipſarum v, v', v'' etc. reſp. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$,

$-e''\sqrt{p''}$ etc. Hinc valor verus ipsius x erit $= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''}$ etc., siue error valoris ipsius x, in determinatione maxime idonea commissus, quem per Ex denotare conuenit,

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Perinde error valoris ipsius y in determinatione maxime idonea commissus, quem per Ey denotabimus, erit

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Valor medius quadrati $(Ex)^2$ inuenitur $= mmp(\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\alpha]$; valor medius quadrati $(Ey)^2$ perinde $= mmp[\beta\beta]$ etc., vt iam supra docuimus. Iam vero etiam valorem medium *producti* $Ex.Ey$ assignare licet, quippe qui inuenitur

$$= mmp(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\beta].$$

Conciune haec ita quoque exprimi possunt. Valores medii quadratorum $(Ex)^2$, $(Ey)^2$ etc. resp. aequales sunt productis ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientes differentialium partialium secundi ordinis

$$\frac{dd\Omega}{d\xi^2},\ \frac{dd\Omega}{d\eta^2} \text{ etc.}$$

valorque medius producti talis, vt $Ex.Ey$, aequalis est producto ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientem differentialem $\frac{dd\Omega}{d\xi.d\eta}$, quatenus quidem Ω tamquam functio indeterminatarum ξ, η, ζ etc. consideratur.

29.

Designet t functionem datam linearem quantitatum x, y, z etc. puta sit

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k.$$

Valor ipsius t, e valoribus maxime plausibilibus ipsarum x, y, z etc. prodiens hinc erit $= fA + gB + hC + \text{etc.} + k$, quem per K denotabimus. Qui si tamquam valor verus ipsius t adoptatur, error committitur, qui erit

$$= fEx + gEy + hEz + \text{etc.}$$

atque per Et denotabitur. Manifesto valor medius huius erroris fit $= o$, siue error a parte constante liber erit. At valor medius quadrati $(Et)^2$, siue valor medius aggregati

$$\begin{aligned} ff(Ex)^2 + 2fg\,Ex.Ey + 2fh\,Ex.Ez + \text{etc.} \\ + gg\,(Ey)^2 + 2gh\,Ey.Ez + \text{etc.} \\ + hh\,(Ez)^2 + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

per ea, quae in art. praec. exposuimus, aequalis fit producto ex mmp in aggregatum

$$\begin{aligned} ff[\alpha\alpha] + 2fg[\alpha\beta] + 2fh[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\ + gg[\beta\beta] + 2gh[\beta\gamma] + \text{etc.} \\ + hh[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

siue producto ex mmp in valorem functionis $\Omega - M$, qui prodit per substitutiones

$$\xi = f,\ \eta = g,\ \zeta = h \text{ etc.}$$

Denotando igitur hunc valorem determinatum functionis $\Omega - M$ per ω, error medius metuendus, dum determinationi $t = K$ adhaeremus, erit $= m\sqrt{p\,\omega}$, siue pondus huius determinationis $= \frac{1}{\omega}$.

Quum indefinite habeatur $\Omega - M = (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta +$ etc., patet, ω quoque aequalem esse valori determinato expressionis $(x - A)f + (y - B)g + (z - C)h +$ etc., siue valori determinato ipsius $t - K$, qui prodit, si indeterminatis x, y, z etc tribuuntur valores ii, qui respondent valoribus ipsarum ξ, η, ζ etc his f, g, h etc.

Denique obseruamus, si t indefinite in formam functionis ipsarum ξ, η, ζ etc. redigatur, ipsius partem constantem necessario fieri $= K$. Quodsi igitur indefinite fit

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

erit $\omega = fF + gG + hH +$ etc.

30.

Functio Ω valorem suum *absolute minimum* M, vt supra vidimus, nanciscitur, faciendo $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc., siue $\xi = o$

$\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. Si vero alicui illarum quantitatum valor *alius* iam tributus est, e. g. $x = A + \Delta$, variantibus reliquis Ω assequi potest valorem relatiue minimum, qui manifesto obtinetur adiumento aequationum

$$x = A + \Delta,\ \frac{d\Omega}{dy} = 0,\ \frac{d\Omega}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

Fieri debet itaque $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc., adeoque, quoniam $x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta +$ etc., $\xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}$. Simul habebitur

$$y = B + \frac{[\alpha\beta]\Delta}{[\alpha\alpha]},\ z = C + \frac{[\alpha\gamma]\Delta}{[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Valor relatiue minimus ipsius Ω autem fit $= [\alpha\alpha]\xi\xi + M = M + \frac{\Delta\Delta}{[\alpha\alpha]}$. Vice versa hinc colligimus, si valor ipsius Ω limitem praescriptum $M + \mu\mu$ non superare debet, valorem ipsius x necessario inter limites $A - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ et $A + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ contentum esse debere. Notari meretur, $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ aequalem fieri errori medio in valore maxime plausibili ipsius x metuendo, si statuatur $\mu = m\sqrt{p}$, i. e. si μ aequalis sit errori medio obseruationum talium, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

Generalius inuestigemus valorem minimum ipsius Ω, qui pro valore dato ipsius t locum habere potest, denotante t vt in art. praec. functionem linearem $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$, et cuius valor maxime plausibilis $= K$: valor praescriptus ipsius t denotetur per $K + \varkappa$. E theoria maximorum et minimorum constat, problematis solutionem petendam esse ex aequationibus

$$\frac{d\Omega}{dx} = \theta \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \theta \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \theta \frac{dt}{dz} \text{ etc.}$$

ſiue $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$ etc., deſignante θ multiplicatorem adhuc indeterminatum. Quare ſi, vt in art. praec., ſtatuimus, eſſe *indefinite*

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

habebimus

$$K + \varkappa = \theta(fF + gG + hH + \text{etc.}) + K, \text{ ſiue}$$

$$\theta = \frac{\varkappa}{\omega}$$

accipiendo ω in eadem ſignificatione vt in art. praec. Et quum $\Omega - M$, indefinite, ſit functio homogenea ſecundi ordinis indeterminatarum ξ, η, ζ etc., ſponte patet, eius valorem pro $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$ etc. fieri $= \theta\theta\omega$, et proin valorem minimum, quem Ω pro $t = K + \varkappa$ obtinere poteſt, fieri $= M + \theta\theta\omega = M + \frac{\varkappa\varkappa}{\omega}$. Vice verſa, ſi Ω debet valorem aliquem praeſcriptum $M + \mu\mu$ non ſuperare, valor ipſius t neceſſario inter limites $K - \mu\sqrt{\omega}$ et $K + \mu\sqrt{\omega}$ contentus eſſe debet, vbi $\mu\sqrt{\omega}$ aequalis ſit errori medio in determinatione maxime plauſibili ipſius t metuendo, ſi pro μ accipitur error medius obſeruationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

31.

Quoties multitudo quantitatum x, y, z etc. paullo maior eſt, determinatio numerica valorum A, B, C etc. ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. per eliminationem vulgarem ſatis moleſta euadit. Propterea in Theoria Motus Corporum Coeleſtium art. 182 algorithmum peculiarem addigitauimus, atque in *Disquiſitione de elementis ellipticis Palladis* (Comm. recent. Soc. Gotting. Vol. I.) copioſe explicauimus, per quem labor ille ad tantam quantam quidem res fert ſimplicitatem euehitur. Reducenda ſcilicet eſt functio Ω ſub formam talem:

$$\frac{u^\circ u^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{u' u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u'' u''}{\mathfrak{C}''} + \frac{u''' u'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + M$$

vbi diuisores $\mathfrak{A}^\circ$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ *etc.* sunt quantitates determinatae; u°, u', u'', u''' etc. autem functiones lineares ipsarum x, y, z etc. quarum tamen secunda u' libera est ab x, tertia u'' libera ab x et y, quarta libera ab x, y et z, et sic porro, ita vt vltima $u^{(\pi-1)}$ solam vltimam indeterminatarum x, y, z etc. implicet; denique coëfficientes, per quos x, y, z etc. resp. multiplicatae sunt in u°, u', u'' etc., resp. aequales sunt ipsis $\mathfrak{A}^\circ$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. Quibus ita factis statuendum est $u^\circ = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc., vnde valores incognitarum x, y, z etc. inuerso ordine commodissime elicientur. Haud opus videtur, algorithmum ipsum, per quem haec transformatio functionis Ω absoluitur, hic denuo repetere.

Sed multo adhuc magis prolixum calculum requirit eliminatio indefinita, cuius adiumento illarum determinationum pondera inuenire oportet. Pondus quidem determinationis incognitae vltimae (quae sola vltimam $u^{(\pi-1)}$ ingreditur) per ea, quae in Theoria Motus Corporum Coelestium demonstrata sunt, facile inuenitur aequale termino vltimo in serie diuisorum $\mathfrak{A}^\circ$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc.; quapropter plures calculatores, vt eliminationem illam molestam euitarent, deficientibus aliis subsidiis, ita sibi consuluerunt, vt algorithmum de quo diximus pluries, mutato quantitatum x, y, z etc., ordine, repeterent, singulis deinceps vltimum locum occupantibus. Gratum itaque geometris fore speramus, si modum nouum pondera determinationum calculandi, e penitiori argumenti perscrutatione haustum hic exponamus, qui nihil amplius desiderandum relinquere videtur.

32.

Statuamus itaque esse (I)

$$\begin{aligned} u^\circ &= \mathfrak{A}^\circ x + \mathfrak{B}^\circ y + \mathfrak{C}^\circ z + \text{etc.} + \mathfrak{L}^\circ \\ u' &= \qquad\quad \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \qquad\qquad\qquad \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}'' \end{aligned}$$

etc.

Hinc erit indefinite

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\Omega &= \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.} \\ &= \frac{u^\circ\,\mathrm{d}u^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{u'\,\mathrm{d}u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''\,\mathrm{d}u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} \\ &= u^\circ\left(\mathrm{d}x + \frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,\mathrm{d}y + \frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,\mathrm{d}z + \text{etc.}\right) \\ &\quad + u'\left(\mathrm{d}y + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}\,\mathrm{d}z + \text{etc.}\right) + u''(\mathrm{d}z + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

vnde colligimus (II)

$$\begin{aligned} \xi &= u^\circ \\ \eta &= \frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,u^\circ + u' \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,u^\circ + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}\,u' + u'' \end{aligned}$$

etc.

Supponamus, hinc deriuari formulas sequentes (III)

$$\begin{aligned} u^\circ &= \xi \\ u' &= A'\xi + \eta \\ u'' &= A''\xi + B''\eta + \zeta \end{aligned}$$

etc.

Iam e differentiali completo aequationis

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \text{etc.} + M$$

subtracta aequatione

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\Omega = \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.}$$

sequitur

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\Omega = (x - A)\,\mathrm{d}\xi + (y - B)\,\mathrm{d}\eta + (z - C)\,\mathrm{d}\zeta + \text{etc.}$$

quae expreſſio identica eſſe debet cum hac ex III demanante:

$$\frac{u^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}.\mathrm{d}\xi + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}(A'\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\eta) + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}(A''\mathrm{d}\xi + B''\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\zeta) + \text{etc.}$$

Hinc colligimus (IV)

$$x = \frac{u^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + A'.\frac{u'}{\mathfrak{B}'} + A''.\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + A$$

$$y = \frac{u'}{\mathfrak{B}'} + B''.\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + B$$

$$z = \frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + C$$

etc.

Subſtituendo in his expreſſionibus pro u°, u', u'' etc. valores earum ex III depromtos, eliminatio indefinita abſoluta erit. Et quidem ad pondera determinanda habebimus (V)

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{A'A'}{\mathfrak{B}'} + \frac{A''A''}{\mathfrak{C}''} + \frac{A'''A'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}$$

$$[\beta\beta] = \frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{B''B''}{\mathfrak{C}''} + \frac{B'''B'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}$$

$$[\gamma\gamma] = \frac{1}{\mathfrak{C}''} + \frac{C'''C'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}$$

etc.

quarum formularum ſimplicitas nihil deſiderandum relinquit. Ceterum etiam pro coëfficientibus reliquis $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ etc. formulae aeque ſimplices prodeunt, quas tamen, quum illorum vſus ſit rarior, hic apponere ſuperſedemus.

33.

Propter rei grauitatem, et vt omnia ad calculum parata ſint, etiam formulas explicitas ad determinationem coëfficientium A', A'', A''' etc. B'', B''' etc. etc. hic adſcribere viſum eſt. Duplici modo hic calculus adornari poteſt, quum aequationes identicae prodire debeant, tum ſi valores ipſarum u°, u', u'' etc. ex III depromti in II ſubſtituuntur, tum ex ſubſtitutione valorum ipſarum ξ, η, ζ etc. ex II in III. Prior modus haec formularum ſyſtemata ſubminiſtrat:

$$\frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + A' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'}.A' + A'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'}.A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''}.A'' + A''' = 0$$

etc. vnde inueniuntur A', A'', A''' etc.

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} B'' + B''' = 0$$

etc. vnde inueniuntur B'', B''' etc.

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

etc. vnde inueniuntur C''' etc. Et ſic porro.

Alter modus has formulas ſuggerit:

$$\mathfrak{A}^\circ A' + \mathfrak{B}^\circ = 0$$

vnde habetur A'.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^\circ A'' + \mathfrak{B}^\circ B'' + \mathfrak{C}^\circ &= 0 \\ \mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' &= 0 \end{aligned}$$

vnde inueniuntur B'' et A''.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^\circ A''' + \mathfrak{B}^\circ B''' + \mathfrak{C}^\circ C''' + \mathfrak{D}^\circ &= 0 \\ \mathfrak{B}' B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' &= 0 \\ \mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' &= 0 \end{aligned}$$

vnde inueniuntur C''', B''', A'''. Et ſic porro.

Vterque modus aeque fere commodus eſt, ſi pondera determinationum cunctarum x, y, z etc. deſiderantur; quoties vero e quantitatibus $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. vna tantum vel altera requiritur, manifeſto ſyſtema prius longe praeferendum erit.

F 2

Ceterum combinatio aequationum I cum IV ad easdem formulas perducit, insuperque calculum duplicem ad eruendos valores maxime plausibiles A, B, C etc. ipsos suppeditat, puta *primo*

$$A = -\frac{\xi^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} - A'\frac{\xi'}{\mathfrak{B}'} - A''\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - A'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

$$B = \qquad -\frac{\xi'}{\mathfrak{B}'} - B''\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - B'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

$$C = \qquad\qquad -\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - C'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

etc.

Calculus alter identicus est cum vulgari, vbi statuitur $u^\circ = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc.

34.

Quae in art. 32. exposuimus, sunt tantummodo casus speciales theorematis generalioris, quod ita se habet:

Theorema. *Designet t functionem linearem indeterminatarum x, y, z etc. hanc*

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

quae transmutata in functionem indeterminatarum u°, u', u'' etc. fiat

$$t = k^\circ u^\circ + k'u' + k''u'' + \text{etc.} + K$$

Quibus ita se habentibus erit K valor maxime plausibilis ipsius t, atque pondus huius determinationis

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^\circ k^\circ k^\circ + \mathfrak{B}'k'k' + \mathfrak{C}''k''k'' + \text{etc.}}$$

Dem. Pars prior theorematis inde patet, quod valor maxime plausibilis ipsius t valoribus $u^\circ = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. respondere debet. Ad posteriorem demonstrandam obseruamus, quoniam $\frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = \xi\mathrm{d}x + \eta\mathrm{d}y + \zeta\mathrm{d}z + \text{etc.}$, atque $\mathrm{d}t = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z + \text{etc.}$, esse, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc.

$$\mathrm{d}\Omega = 2\,\mathrm{d}t$$

Hinc vero ſequitur, pro iisdem valoribus $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., fieri

$$\frac{u^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,\mathrm{d}u^\circ + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}\,\mathrm{d}u' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}\,\mathrm{d}u'' + \text{etc.} = k^\circ \mathrm{d}u^\circ + k'\mathrm{d}u' + k''\mathrm{d}u'' + \text{etc.}$$

Iam facile perſpicitur, ſi $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc. ſint ab inuicem independentes, etiam $\mathrm{d}u^\circ$, $\mathrm{d}u'$, $\mathrm{d}u''$ etc., ab inuicem independentes eſſe; vnde colligimus, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc. eſſe

$$u^\circ = \mathfrak{A}^\circ k^\circ,\ u' = \mathfrak{B}'k',\ u'' = \mathfrak{C}''k''\ \text{etc.}$$

Quamobrem valor ipſius Ω, iisdem valoribus reſpondens erit

$$= \mathfrak{A}^\circ k^\circ k^\circ + \mathfrak{B}'k'k' + \mathfrak{C}''k''k'' + \text{etc.} + M.$$

vnde per art. 29. theorematis noſtri veritas protinus demanat.

Ceterum ſi transformationem functionis ε immediate, i. e. absque cognitione ſubſtitutionum IV. art. 32, perficere cupimus, praeſto ſunt formulae:

$$f = \mathfrak{A}^\circ k^\circ$$
$$g = \mathfrak{B}^\circ k^\circ + \mathfrak{B}'k'$$
$$h = \mathfrak{C}^\circ k^\circ + \mathfrak{C}'k' + \mathfrak{C}''k''$$

etc., vnde coëfficientes k°, k', k'' etc. deinceps determinabuntur, tandemque habebitur

$$K = -\mathfrak{l}^\circ k^\circ - \mathfrak{l}'k' - \mathfrak{l}''k'' - \text{etc.}$$

35.

Tractatione peculiari dignum eſt problema ſequens, tum propter vtilitatem practicam, tum propter ſolutionis concinnitatem.

Inuenire mutationes valorum maxime plauſibilium incognitarum ab acceſſione aequationis nouae productas, nec non pondera nouarum determinationum.

Retinebimus deſignationes in praecedentibus adhibitas, ita vt aequationes primitiuae, ad pondus = 1 reductae, ſint hae

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}.$$ Et quum indefinite fit

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}.\xi^* + \frac{G}{1+\omega}.\eta^* + \frac{H}{1+\omega}.\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

pondus istius determinationis per principia art. 29. eruitur

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Eadem immediate resultant ex applicatione regulae in fine art. 21. traditae; scilicet complexus aequationum primitiuarum praebuerat determinationem $v^* = K$ cum pondere $= \frac{1}{\omega}$, dein obseruatio noua dedit determinationem aliam, ab illa independentem, $v^* = 0$, cum pondere $= 1$, quibus combinatis prodit determinatio $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ cum pondere $= \frac{1}{\omega} + 1$.

II. Hinc porro sequitur, quum pro $x = A^*$, $y = B^*$, $z = C^*$ etc. esse debeat $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc., pro iisdem valoribus fieri

$$\xi = -\frac{fK}{1+\omega},\ \eta = -\frac{gK}{1+\omega},\ \zeta = -\frac{hK}{1+\omega}\ \text{etc.}$$

nec non, quoniam indefinite $\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \text{etc.} + M$,

$$\Omega = \frac{KK}{(1+\omega)^2}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) + M = M + \frac{\omega KK}{(1+\omega)^2};$$

denique, quoniam indefinite $\Omega^* = \Omega + v^* v^*$,

$$\Omega^* = M + \frac{\omega KK}{(1+\omega)^2} + \frac{KK}{(1+\omega)^2} = M + \frac{KK}{1+\omega}$$

III. Comparando haec cum iis quae in art. 30. docuimus, animaduertimus, functionem Ω hic valorem minimum obtinere, quem pro valore determinato functionis $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ accipere potest.

36.

Problematis alius, praecedenti affinis, puta

Inuestigare mutationes valorum maxime plausibilium incognitarum, a mutato pondere vnius ex obseruationibus primitiuis oriundas, nec non pondera nouarum determinationum

solutionem tantummodo hic adscribemus, demonstrationem, quae ad instar art. praec. facile absoluitur, breuitatis caussa supprimentes.

Supponamus, peracto demum calculo animaduerti, alicui obseruationum pondus seu nimis paruum, seu nimis magnum tributum esse, e. g. obseruationi primae, quae dedit $V = L$, loco ponderis p in calculo adhibiti rectius tribui pondus $= p^*$. Tunc haud opus erit calculum integrum repetere, sed commodius correctiones per formulas sequentes computare licebit.

Valores incognitarum maxime plausibiles correcti erunt hi:

$$x = A - \frac{(p^* + p)\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$y = B - \frac{(p^* - p)\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$z = C - \frac{(p^* - p)\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc. ponderaque harum determinationum inuenientur, diuidendo vnitatem resp. per

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\alpha\alpha}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\beta\beta}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\gamma\gamma}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \text{ etc.}$$

Haec solutio simul complectitur casum, vbi peracto calculo percipitur, vnam ex obseruationibus omnino reiici debuisse, quum hoc idem sit ac si facias $p^* = 0$; et perinde valor $p^* = \infty$ refertur ad casum eum, vbi aequatio $V = L$, quae in calculo tamquam approximata tractata erat, reuera praecisione absoluta gaudet.

Ceterum quoties vel aequationibus, quibus calculus superstructus erat, *plures* nouae accedunt, vel *pluribus* ex illis pondera erronea tributa esse percipitur, computus correctionum nimis complicatus euaderet; quocirca in tali casu calculum ab integro reficere praestabit.

37.

In art. 15, 16. methodum explicauimus, obseruationum praecisionem proxime determinandi *). Sed haec methodus supponit, errores, qui reuera occurrerint, satis multos exacte cognitos esse, quae conditio, stricte loquendo, rarissime, ne dicam numquam, locum habebit. Quodsi quidem quantitates, quarum valores approximati per obseruationes innotuerunt, secundum legem cognitam, ab vna pluribusue quantitatibus incognitis pendent, harum valores maxime plausibiles per methodum quadratorum minimorum eruere licebit, ac dein valores quantitatum, quae obseruationum obiecta fuerant, illinc computati perparum a valoribus veris discrepare censebuntur, ita vt ipsorum differentias a valoribus obseruatis eo maiori iure tamquam obseruationum errores veros adoptare liceat, quo maior fuerit harum multitudo. Hanc praxin sequuti sunt omnes calculatores, qui obseruationum praecisionem in casibus concretis a posteriori aestimare susceperunt: sed manifesto illa theoretice erronea est, et quamquam in casibus multis ad vsus practicos sufficere possit, tamen

*) Disquisitio, de eodem argumento, quam in commentatione anteriori (*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* Vol. I, p. 185.) tradideramus, eidem hypothesi circa indolem functionis probabilitatem errorum exprimentis innixa erat, cui in Theoria motus corporum coelestium methodum quadratorum minimorum superstruxeramus (vid. art. 9, III.).

in aliis enormiter peccare poteſt. Summopere itaque hoc argumentum dignum eſt, quod accuratius enodetur.

Retinebimus in hac disquiſitione deſignationes inde ab art. 19. adhibitas. Praxis ea de qua diximus, quantitates A, B, C etc. tamquam valores veros ipſarum x, y, z conſiderat, et proin ipſas λ, λ', λ'' etc. tamquam valores veros functionum v, v', v'' etc. Si omnes obſeruationes aequali praeciſione gaudent, ipſarumque pondus $p=p'=p''$ etc. pro vnitate acceptum eſt, eaedem quantitates, ſignis mutatis, in illa ſuppoſitione obſeruationum errores exhibent, vnde praecepta art. 15. praebent obſeruationum errorem medium m

$$= \sqrt{\frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

Si obſeruationum praeciſio non eſt eadem, quantitates $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ etc. exhiberent obſeruationum errores per radices quadratas e ponderibus multiplicatos, praeceptaque art. 16. ad eandem formulam $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ perducerent, iam errorem medium talium obſervationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur, denotantem. Sed manifeſto calculus exactus requireret, vt loco quantitatum λ, λ', λ'' etc. valores functionum v, v', v'' etc. e valoribus veris ipſarum x, y, z etc. prodeuntes adhiberentur, i. e. loco ipſius M, valor functionis Ω valoribus veris ipſarum x, y, z etc. reſpondens. Qui quamquam aſſignari nequeat, tamen certi ſumus, eum eſſe maiorem quam M (quippe qui eſt minimus poſſibilis), excipiendo caſum infinite parum probabilem, vbi incognitarum valores maxime plauſibiles exacte cum veris quadrant. In genere itaque affirmare poſſumus, praxin vulgarem errorem medium iuſto minorem producere, ſiue obſeruationibus praeciſionem nimis magnam tribuere. Videamus iam, quid doceat theoria rigoroſa.

38.

Ante omnia inuestigare oportet, quonam modo M ab obseruationum erroribus veris pendeat. Denotemus hos, vt in art. 28, per e, e', e'' etc., statuamusque ad maiorem simplicitatem

$$e\sqrt{p}=\varepsilon,\ e'\sqrt{p'}=\varepsilon',\ e''\sqrt{p''}=\varepsilon''\text{ etc., nec non}$$

$$m\sqrt{p}=m'\sqrt{p'}=m''\sqrt{p''}\text{ etc. }=\mu$$

Porro sint valores veri ipsarum x, y, z etc. resp. $A-x^\circ$, $B-y^\circ$, $C-z^\circ$ etc., quibus respondeant valores ipsarum ξ, η, ζ etc. hi $-\xi^\circ$, $-\eta^\circ$, $-\zeta^\circ$ etc. Manifesto iisdem respondebunt valores ipsarum v, v', v'' etc. hi $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. ita vt habeatur

$$\xi^\circ=a\varepsilon+a'\varepsilon'+a''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

$$\eta^\circ=b\varepsilon+b'\varepsilon'+b''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

$$\zeta^\circ=c\varepsilon+c'\varepsilon'+c''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

etc. nec non

$$x^\circ=\alpha\varepsilon+\alpha'\varepsilon'+\alpha''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

$$y^\circ=\beta\varepsilon+\beta'\varepsilon'+\beta''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

$$z^\circ=\gamma\varepsilon+\gamma'\varepsilon'+\gamma''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

Denique statuemus

$$\Omega^\circ=\varepsilon\varepsilon+\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

ita vt sit Ω° aequalis valori functionis Ω valoribus veris ipsarum x, y, z etc. respondenti. Hinc quum habeatur indefinite $\Omega=M+(x-A)\,\xi+(y-B)\,\eta+(z-C)\,\zeta+$ etc., erit etiam

$$M=\Omega^\circ-x^\circ\xi^\circ-y^\circ\eta^\circ-z^\circ\zeta^\circ-\text{ etc.}$$

Hinc manifestum est, M, euolutione facta esse functionem homogeneam secundi ordinis errorum e, e', e'' etc., quae, pro diuersis errorum valoribus maior minorue euadere poterit. Sed quatenus errorum magnitudo nobis incognita manet, functionem hanc indefinite considerare, imprimisque secundum principia calculi probabilitatis eius valorem medium assignare conueniet. Quem inueniemus, si loco quadratorum ee, $e'e'$, $e''e''$ etc. resp. scribimus mm, $m'm'$, $m''m''$ etc., producta vero ee', ee'', $e'e''$ etc.

omnino omittimus, vel quod idem est, si loco cuiusuis quadrati $\varepsilon\varepsilon$, $\varepsilon'\varepsilon'$, $\varepsilon''\varepsilon''$ etc. scribimus $\mu\mu$, productis $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$ $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. prorsus neglectis. Hoc modo e termino Ω° manifesto prouenit $\pi\mu\mu$; terminus $-x^\circ\xi^\circ$ producet

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu\mu = -\mu\mu$$

et similiter singulae partes reliquae praebebunt $-\mu\mu$, ita vt valor medius totalis fiat $=(\pi-\rho)\mu\mu$, denotante π multitudinem obseruationum, ρ multitudinem incognitarum. Valor verus quidem ipsius M, prout fors errores obtulit, maior minorue medio fieri potest, sed discrepantia eo minoris momenti erit, quo maior fuerit obseruationum multitudo, ita vt pro valore approximato ipsius μ accipere liceat

$$\sqrt{\frac{M}{\pi-\rho}}$$

Valori itaque ipsius μ, ex praxi erronea, de qua in art. praec. loquuti sumus, prodiens, augeri debet in ratione quantitatis $\sqrt{(\pi-\rho)}$ ad $\sqrt{\pi}$.

39.

Quo clarius eluceat, quanto iure valorem fortuitum ipsius M medio aequiparare liceat, adhuc inuestigare oportet errorem medium metuendum, dum statuimus $\frac{M}{\pi-\rho} = mm$. Iste error medius aequalis est radici quadratae e valore medio quantitatis

$$\left(\frac{\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \text{etc.} - (\pi-\rho)mm}{\pi-\rho}\right)^2$$

quam ita exhibebimus

$$\left(\frac{\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \text{etc.}}{\pi-\rho}\right)^2$$

$$-\frac{2\mu\mu}{\pi-\rho}\left(\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \text{etc.} - (\pi-\rho)\mu\mu\right) - \mu^4$$

et quum manifesto valor medius termini secundi fiat $=0$, res in eo vertitur, vt indagemus valorem medium functionis

$$\Psi = (\Omega^\circ - x^\circ \xi^\circ - y^\circ \eta^\circ - z^\circ \zeta^\circ - \text{etc.})^2$$

quo inuento et per N designato, error medius quaesitus erit

$$= \sqrt{\left(\frac{N}{(\pi - \rho)^2} - \mu^4\right)}$$

Expressio Ψ euoluta manifesto est functio homogenea siue errorum e, e', e'' etc., siue quantitatum $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc., eiusque valor medius inuenietur, si

1° pro biquadratis e^4, e'^4, e''^4 etc. substituuntur eorum valores medii

2° pro singulis productis e binis quadratis vt $e e e' e'$, $e e e'' e''$, $e' e' e'' e''$ etc. producta ex ipsorum valoribus mediis, puta $m m m' m'$, $m m m'' m''$, $m' m' m'' m''$ etc.

3° partes vero reliquae, quae implicabunt vel factorem talem $e^3 e'$, vel talem $e e e' e''$, omnino omittuntur. Valores medios biquadratorum e^4, e'^4, e''^4 etc. ipsis biquadratis m^4, m'^4, m''^4 etc. proportionales supponemus (vid. art. 16), ita vt illi sint ad haec vt ν^4 ad μ^4, adeoque ν^4 denotet valorem medium biquadratorum obseruationum talium quarum pondus $= 1$. Hinc praecepta praecedentia ita quoque exprimi poterunt: Loco singulorum biquadratorum ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. scribendum erit ν^4, loco singulorum productorum e binis quadratis vt $\varepsilon \varepsilon \varepsilon' \varepsilon'$, $\varepsilon \varepsilon \varepsilon'' \varepsilon''$, $\varepsilon' \varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon''$ etc., scribendum erit μ^4, omnesque reliqui termini, qui implicabunt factores tales vt $\varepsilon^3 \varepsilon'$, vel $\varepsilon \varepsilon \varepsilon' \varepsilon''$, vel $\varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon'''$ erunt supprimendi.

His probe intellectis facile patebit

I. Valorem medium quadrati $\Omega^\circ \Omega^\circ$ esse $\pi \nu^4 + (\pi\pi - \pi)\mu^4$

II. Valor medius producti $\varepsilon \varepsilon x^\circ \xi^\circ$ fit $= a \alpha \nu^4 + (a' \alpha' + a'' \alpha'' + \text{etc.})\mu^4$, siue quoniam $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.} = 1$,
$= a\alpha(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$

Et quum perinde valor medius producti $\varepsilon' \varepsilon' x^\circ \xi^\circ$ fiat $=$

$a'\alpha'(\nu^4-\mu^4)+\mu^4$, valor medius producti $\varepsilon''\varepsilon''x^\circ\xi^\circ$ autem $=a''\alpha''(\nu^4-\mu^4)+\mu^4$ et ſic porro, patet, valorem medium producti $(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon''\varepsilon''+\text{etc.})\,x^\circ\xi^\circ$ ſiue $\Omega^\circ x^\circ\xi^\circ$ eſſe

$$=\nu^4-\mu^4+\pi\mu^4$$

Eundem valorem medium habebunt producta $\Omega^\circ y^\circ\eta^\circ$, $\Omega^\circ z^\circ\zeta^\circ$ etc. Quapropter valor medius producti $\Omega^\circ(x^\circ\xi^\circ+y^\circ\eta^\circ+z^\circ\zeta^\circ+\text{etc.})$ fit

$$=\varrho\nu^4+\varrho(\pi-1)\mu^4$$

III. Ne euolutiones reliquae nimis prolixae euadant, idonea denotatio introducenda erit. Vtemur itaque characteriſtica Σ ſenſu aliquantum latiori quam ſupra paſſim factum eſt, ita vt denotet aggregatum termini, cui praefixa eſt, cum omnibus ſimilibus ſed non identicis inde per omnes obſeruationum permutationes oriundis. Hoc pacto e. g. habemus $x^\circ=\Sigma\alpha\varepsilon$, $x^\circ x^\circ=\Sigma\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon+2\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Colligendo itaque valorem medium producti $x^\circ x^\circ\xi^\circ\xi^\circ$ per partes, habemus primo valorem medium producti $\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon\xi^\circ\xi^\circ$

$$=aa\alpha\alpha\nu^4+\alpha\alpha(a'\alpha'+a''\alpha''+\text{etc.})\mu^4$$
$$=aa\alpha\alpha(\nu^4-\mu^4)+\alpha\alpha\mu^4\Sigma a\alpha$$

Perinde valor medius producti $\alpha'\alpha'\varepsilon'\varepsilon'\xi^\circ\xi^\circ$ fit $=a'a'\alpha'\alpha'(\nu^4-\mu^4)+\alpha'\alpha'\mu^4\Sigma a\alpha$ et ſic porro, adeoque valor medius producti $\xi^\circ\xi^\circ\Sigma\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon$

$$=(\nu^4-\mu^4)\Sigma aa\alpha\alpha+\mu^4\Sigma a\alpha.\Sigma\alpha\alpha$$

Porro valor medius producti $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^\circ\xi^\circ$ fit $=2\alpha\alpha'aa'\mu^4$, valor medius producti $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^\circ\xi^\circ$ perinde $=2\alpha\alpha''aa''\mu^4$ etc., vnde facile concluditur, valorem medium producti $\xi^\circ\xi^\circ\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ fieri

$$=2\mu^4\Sigma\alpha a\alpha'a'=\mu^4((\Sigma a\alpha)^2-\Sigma aa\alpha\alpha)=\mu^4(1-\Sigma aa\alpha\alpha)$$

His collectis habemus valorem medium producti $x^\circ x^\circ\xi^\circ\xi^\circ$

$$=(\nu^4-3\mu^4)\Sigma aa\alpha\alpha+2\mu^4+\mu^4\Sigma aa.\Sigma\alpha\alpha.$$

IV. Haud absimili modo inuenitur valor medius producti $x^\circ y^\circ \xi^\circ \eta^\circ$

$$= \nu^4 \Sigma ab\alpha\beta + \mu^4 \Sigma a\alpha b'\beta' + \mu^4 \Sigma ab\alpha'\beta' + \mu^4 \Sigma a\beta b'\alpha'.$$

Sed habetur

$$\Sigma a\alpha b'\beta' = \Sigma a\alpha . \Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta$$
$$\Sigma ab\alpha'\beta' = \Sigma ab . \Sigma \alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta$$
$$\Sigma a\beta b'\alpha' = \Sigma a\beta . \Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha$$

vnde valor ille medius fit, propter $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$,

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4 (1 + \Sigma ab . \Sigma \alpha\beta)$$

V. Quum prorsus eodem modo valor medius producti $x^\circ z^\circ \xi^\circ \zeta^\circ$ fiat

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4 (1 + \Sigma ac . \Sigma \alpha\gamma)$$

et sic porro, additio valorem medium producti $x^\circ \xi^\circ (x^\circ \xi^\circ + y^\circ \eta^\circ + z^\circ \zeta^\circ + \text{etc.})$ suppeditat

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(a\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 1)\mu^4$$
$$+ \mu^4 (\Sigma aa . \Sigma \alpha\alpha + \Sigma ab . \Sigma \alpha\beta + \Sigma ac . \Sigma \alpha\gamma + \text{etc.})$$
$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(a\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

VI. Prorsus eodem modo valor medius producti $y^\circ \eta^\circ (x^\circ \xi^\circ + z^\circ \zeta^\circ + \text{etc.})$ eruitur

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

dein valor medius producti $z^\circ \zeta^\circ (x^\circ \xi^\circ + y^\circ \eta^\circ + z^\circ \zeta^\circ + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

et sic porro. Hinc per additionem prodit valor medius quadrati $(x^\circ \xi^\circ + y^\circ \eta^\circ + z^\circ \zeta^\circ + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2) + (\rho\rho + 2\rho)\mu^4$$

VII. Omnibus tandem rite collectis eruitur

$$N = (\pi - 2\rho)\nu^4 + (\pi\pi - \pi - 2\pi\rho + 4\rho + \rho\rho)\mu^4 +$$
$$(\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2)$$

$$=(\pi-\varrho)(\nu^4-\mu^4)+(\pi-\varrho)^2\mu^4-(\nu^4-3\mu^4)(\varrho-\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2))$$

Error itaque medius in determinatione ipsius $\mu\mu$ per formulam

$$\mu\mu=\frac{M}{\pi-\varrho}$$

metuendus erit

$$=\surd\left\{\frac{\nu^4-\mu^4}{\pi-\varrho}-\frac{\nu^4-3\mu^4}{(\pi-\varrho)^2}.(\varrho-\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2))\right\}.$$

40.

Quantitas $\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2)$, quae in expressionem modo inuentam ingreditur, generaliter quidem ad formam simpliciorem reduci nequit: nihilominus duo limites assignari possunt, inter quos ipsius valor necessario iacere debet. *Primo* scilicet e relationibus supra euolutis facile demonstratur esse

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2+(a\alpha'+b\beta'+c\gamma'+\text{etc.})^2+(a\alpha''+b\beta''+c\gamma''+\text{etc.})^2+\text{etc.}=a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.}$$

vnde concludimus, $a\alpha+b\beta+c\gamma+$ etc. esse quantitatem positiuam vnitate minorem (saltem non maiorem). Idem valet de quantitate $a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'+$ etc., quippe cui aggregatum

$$(a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+\text{etc.})^2+(a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'+\text{etc.})^2+(a'\alpha''+b'\beta''+c'\gamma''\text{ etc.})^2+\text{etc.}$$

aequale inuenitur; ac perinde $a''\alpha''+b''\beta''+c''\gamma''+$ etc. vnitate minor erit, et sic porro. Hinc $\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2)$ necessario est minor quam π. *Secundo* habetur $\Sigma(a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})=\varrho$, quoniam fit $\Sigma a\alpha=1$, $\Sigma b\beta=1$, $\Sigma c\gamma=1$ etc; vnde facile deducitur, summam quadratorum $\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2)$ esse maiorem quam $\frac{\varrho\varrho}{\pi}$, vel saltem non minorem. Hinc terminus

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \rho)^2} \cdot (\rho - \Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2))$$

neceſſario iacet inter limites $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$ et $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho} \cdot \frac{\rho}{\pi}$ vel, ſi latiores praeferimus, inter hos $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$ et $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$, et proin erroris medii in valore ipſius $\mu\mu = \frac{M}{\pi - \rho}$ metuendi quadratum inter limites $\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \rho}$ et $\frac{2\mu^4}{\pi - \rho}$, ita vt praecifionem quantamuis aſſequi liceat, ſi modo obſeruationum multitudo fuerit ſatis magna.

Valde memorabile eſt, in hypotheſi ea (art. 9, III.), cui theoria quadratorum minimorum olim ſuperſtructa fuerat, illum terminum omnino excidere, et ſicuti, ad eruendum valorem approximatum erroris medii obſeruationum μ, in omnibus caſibus aggregatum $\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' +$ etc. $= M$ ita tractare oportet, ac ſi eſſet aggregatum $\pi - \rho$ errorum fortuitorum, ita in illa hypotheſi etiam praecifionem ipſam huius determinationis aequalem fieri ei, quam determinationi ex $\pi - \rho$ erroribus veris tribuendam eſſe in art. 15. inuenimus.

... Presiding 3(b)

SUPPLEMENTUM THEORIAE COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

GOTTINGAE

TYPIS DIETERICHIANIS.

MDCCCXXVIII.

SUPPLEMENTUM THEORIAE COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE,

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITUM 1826, SEPT. 16.

1.

In tractatione theoriae combinationis obseruationum Volumini V Commentationum Recentiorum inserta supposuimus, quantitates eas, quarum valores per obseruationes praecisione absoluta non gaudentes propositi sunt, a certis elementis incognitis ita pendere, vt in forma functionum datarum horum elementorum exhibitae sint, reique cardinem in eo verti, vt haec elementa quàm exactissime ex obseruationibus deriuentur.

In plerisque quidem casibus suppositio ista immediate locum habet. In aliis vero casibus problematis conditio paullo aliter se offert, ita vt primo aspectu dubium videatur, quonam pacto ad formam requisitam reduci possit. Haud raro scilicet accidit, vt quantitates eae, ad quas referuntur obseruationes, nondum exhibitae sint in forma functionum certorum elementorum, neque etiam ad talem formam reducibiles videantur, saltem non commode vel sine ambagibus: dum, ex altera parte, rei indoles quasdam conditiones suppeditat, quibus valores veri quantitatum obseruatarum exacte et necessario satisfacere debent.

Attamen, re propius considerata, facile perspicitur, hunc casum ab altero reuera essentialiter haud differre, sed ad eundem reduci posse. Designando scilicet multitudinem quantitatum obseruatarum per π, multitudinem aequationum conditionalium autem per σ, eligendoque e prioribus $\pi - \sigma$ ad lubitum, nihil impedit, quominus has ipsas pro elementis accipiamus, reliquasque, quarum multitudo erit σ, adiumento aequationum conditionalium tamquam functiones illarum consideremus, quo pacto res ad suppositionem nostram reducta erit.

Verum enim vero etiamsi haec via in permultis casibus satis commode ad finem propositum perducat, tamen negari non potest, eam minus genuinam, operaeque adeo pretium esse, problema in ista altera forma seorsim tractare, tantoque magis, quod solutionem perelegantem admittit. Quin adeo, quum haec solutio noua ad calculos expeditiores perducat, quam solutio problematis in statu priori, quoties σ est minor quam $\frac{1}{2}\pi$, siue quod idem est, quoties multitudo elementorum in commentatione priori per ρ denotata maior est quam $\frac{1}{2}\pi$, solutionem nouam, quam in commentatione praesente explicabimus, in tali casu praeferre conueniet priori, siquidem aequationes conditionales e problematis indole absque ambagibus depromere licet.

2.

Designemus per v, v', v'' etc. quantitates, multitudine π, quarum valores per obseruationem innotescunt, pendeatque quantitas incognita ab illis tali modo, vt per functionem datam illarum, puta

u, exhibeatur: sint porro l, l', l'' etc. valores quotientium differentialium

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v'}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v''} \quad \text{etc.}$$

valoribus veris quantitatum v, v', v'' etc. respondentes. Quemadmodum igitur per substitutionem horum valorum verorum in functione u huius valor verus prodit, ita, si pro v, v', v'' etc. valores erroribus e, e', e'' etc. resp. a veris discrepantes substituuntur, obtinebitur valor erroneus incognitae, cuius error statui potest

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

siquidem, quod semper supponemus, errores e, e', e'' etc. tam exigui sunt, vt (pro functione u non lineari) quadrata et producta negligere liceat. Et quamquam magnitudo errorum e, e', e'' etc. incerta maneat, tamen incertitudinem tali incognitae determinationi inhaerentem generaliter aestimare licet, et quidem per errorem medium in tali determinatione metuendum, qui per principia commentationis prioris fit

$$= \sqrt{(llmm + l'l'm'm' + l''l''m''m'' + \text{etc.})}$$

denotantibus m, m', m'' etc. errores medios obseruationum, aut si singulae obseruationes aequali incertitudini obnoxiae sunt,

$$= m\sqrt{(ll + l'l' + l''l'' + \text{etc.})}$$

Manifesto in hoc calculo pro l, l', l'' etc. aequali iure etiam eos valores quotientium differentialium adoptare licebit, qui valoribus obseruatis quantitatum v, v', v'' etc. respondent.

3.

Quoties quantitates v, v', v'' etc. penitus inter se sunt independentes, incognita vnico tantum modo per illas determinari poterit: quamobrem tunc illam incertitudinem nullo modo nec euitare neque diminuere licet, et circa valorem incognitae ex obseruationibus deducendum nihil arbitrio relinquitur.

At longe secus se habet res, quoties inter quantitates v, v', v'' etc. mutuà dependentia intercedit, quam per σ aequationes conditionales

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0 \text{ etc.}$$

exprimi supponemus, denotantibus X, Y, Z etc. functiones datas indeterminatarum v, v', v'' etc. In hoc casu incognitam nostram infinitis modis diuersis per combinationes quantitatum v, v', v'' etc. determinare licet, quum manifesto loco functionis u adoptari possit quaecunque alia U ita comparata, vt $U - u$ indefinite euanescat, statuendo $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc.

In applicatione ad casum determinatum nulla quidem hinc prodiret differentia respectu valoris incognitae, si obseruationes absoluta praecisione gauderent: sed quatenus hae erroribus obnoxiae manent, manifesto in genere alia combinatio alium valorem incognitae afferet. Puta, loco erroris

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

quem functio u commiserat, iam habebimus

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.}$$

si functionem U adoptamus, atque valores quotientium differentialium $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v}$, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v'}$, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v''}$ etc. resp. per L, L', L'' etc. denotamus. Et quamquam errores ipsos assignare nequeamus, tamen errores medios in diuersis obseruationum combinationibus metuendos inter se comparare licebit: optimaque combinatio ea erit, in qua hic error medius quam minimus euadit. Qui quum fiat

$$= \sqrt{(LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.})}$$

in id erit incumbendum, vt aggregatum $LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$ nanciscatur valorem minimum.

4.

Quum varietas infinita functionum U, quae secundum conditionem in art. praec. enunciatam ipsius u vice fungi possunt, eatenus tantum hic consideranda veniat, quatenus diuersa systemata valorum coëfficientium L, L', L'' etc. inde sequuntur, indagare oportebit ante omnia nexum, qui inter cuncta systemata admissibilia locum habere debet. Designemus valores determinatos quotientium differentialium partialium

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v},\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v'},\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v''}\ \text{etc.}$$
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v},\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v'},\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v''}\ \text{etc.}$$
$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v},\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v'},\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v''}\ \text{etc. etc.}$$

quos obtinent, si ipsis v, v', v'' etc. valores veri tribuuntur, resp. per

$$a,\ a',\ a''\ \text{etc.}$$
$$b,\ b',\ b''\ \text{etc.}$$
$$c,\ c',\ c''\ \text{etc. etc.}$$

patetque, si ipsis v, v', v'' etc. accedere concipiantur talia incrementa $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}v'$, $\mathrm{d}v''$ etc. per quae X, Y, Z etc. non mutentur, adeoque singulae maneant $= 0$, i. e. satisfacientia aequationibus

$$0 = a\,\mathrm{d}v + a'\mathrm{d}v' + a''\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$0 = b\,\mathrm{d}v + b'\mathrm{d}v' + b''\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$0 = c\,\mathrm{d}v + c'\mathrm{d}v' + c''\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
etc.

etiam $u - U$ non mutari debere, adeoque fieri

$$0 = (l-L)\mathrm{d}v + (l'-L')\mathrm{d}v' + (l''-L'')\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$

Hinc facile concluditur, coëfficientes L, L', L'' etc. contentos esse debere sub formulis talibus

$$L = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$L' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$L'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc.}$$

etc., denotantibus x, y, z etc. multiplicatores determinatos. Vice versa patet, si systema multiplicatorum determinatorum x, y, z etc.

ad lubitum assumatur, semper assignari posse functionem U talem, cui valores ipsorum L, L', L'' etc. his aequationibus conformes respondeant, et quae pro conditione in art. praec. enunciata ipsius u vice fungi possit: quin adeo hoc infinitis modis diuersis effici posse. Modus simplicissimus erit statuere $U = u + xX + yY + zZ +$ etc.; generalius statuere licet $U = u + xX + yY + zZ +$ etc. $+ u'$, denotante u' talem functionem indeterminatarum v, v', v'' etc., quae semper euanescit pro $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., et cuius valor in casu determinato de quo agitur fit maximus vel minimus. Sed ad institutum nostrum nulla hinc oritur differentia.

5.

Facile iam erit, multiplicatoribus x, y, z etc. valores tales tribuere, vt aggregatum

$$LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$$

assequatur valorem minimum. Manifesto ad hunc finem haud opus est cognitione errorum mediorum m, m', m'' etc. absoluta, sed sufficit ratio, quam inter se tenent. Introducemus itaque ipsorum loco pondera obseruationum p, p', p'' etc., i. e. numeros quadratis mm, $m'm'$, $m''m''$ etc. reciproce proportionales, pondere alicuius obseruationis ad lubitum pro vnitate accepto. Quantitates x, y, z etc. itaque sic determinari debebunt, vt polynomium indefinitum

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'}$$
$$+ \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

nanciscatur valorem minimum, quod fieri supponemus per valores *determinatos* x°, y°, z° etc.

Introducendo denotationes sequentes

$$\frac{aa}{p} + \frac{a'a'}{p'} + \frac{a''a''}{p''} + \text{etc.} = [aa]$$

$$\frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} + \text{etc.} = [ab]$$
$$\frac{ac}{p} + \frac{a'c'}{p'} + \frac{a''c''}{p''} + \text{etc.} = [ac]$$
$$\frac{bb}{p} + \frac{b'b'}{p'} + \frac{b''b''}{p''} + \text{etc.} = [bb]$$
$$\frac{bc}{p} + \frac{b'c'}{p'} + \frac{b''c''}{p''} + \text{etc.} = [bc]$$
$$\frac{cc}{p} + \frac{c'c'}{p'} + \frac{c''c''}{p''} + \text{etc.} = [cc]$$

etc. nec non

$$\frac{al}{p} + \frac{a'l'}{p'} + \frac{a''l''}{p''} + \text{etc.} = [al]$$
$$\frac{bl}{p} + \frac{b'l'}{p'} + \frac{b''l''}{p''} + \text{etc.} = [bl]$$
$$\frac{cl}{p} + \frac{c'l'}{p'} + \frac{c''l''}{p''} + \text{etc.} = [cl]$$

etc.

manifesto conditio minimi requirit vt fiat

$$\left.\begin{aligned} 0 &= [aa]x^\circ + [ab]y^\circ + [ac]z^\circ + \text{etc.} + [al] \\ 0 &= [ab]x^\circ + [bb]y^\circ + [bc]z^\circ + \text{etc.} + [bl] \\ 0 &= [ac]x^\circ + [bc]y^\circ + [cc]z^\circ + \text{etc.} + [cl] \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Postquam quantitates x°, y°, z° etc. per eliminationem hinc deriuatae sunt, statuetur

$$\left.\begin{aligned} ax^\circ + by^\circ + cz^\circ + \text{etc.} + l &= L \\ a'x^\circ + b'y^\circ + c'z^\circ + \text{etc.} + l' &= L' \\ a''x^\circ + b''y + c''z^\circ + \text{etc.} + l'' &= L'' \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

His ita factis, functio quantitatum v, v' v'' etc. ea ad determinationem incognitae nostrae maxime idonea minimaeque incertitudini obnoxia erit, cuius quotientes differentiales partiales in casu determinato de quo agitur habent valores L, L', L'' etc. resp., pondusque huius determinationis, quod per P denotabimus, erit

$$= \frac{1}{\frac{LL}{p} + \frac{L'L'}{p'} + \frac{L''L''}{p''} + \text{etc.}} \quad (3)$$

siue $\frac{1}{P}$ erit valor polynomii supra allati pro eo systemate valorum quantitatum x, y, z etc., per quod aequationibus (1) satisfit.

6.

In art. praec. eam functionem U dignoscere docuimus, quae determinationi maxime idoneae incognitae nostrae inseruit: videamus iam, quemnam *valorem* incognita hoc modo assequatur. Designetur hic valor per K, qui itaque oritur, si in U valores obseruati quantitatum v, v', v'' etc. substituuntur; per eandem substitutionem obtineat functio u valorem k; denique sit $\varkappa$ valor verus incognitae, qui proin e valoribus veris quantitatum v, v', v'' etc. proditurus esset, si hos vel in U vel in u substituere possemus. Hinc itaque erit

$$k = \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$
$$K = \varkappa + Le + L'e' + L''l'' + \text{etc.}$$

adeoque

$$K = k\ (L-l)e + (L'-l')e' + (L''-l'')e'' + \text{etc.}$$

Substituendo in hac aequatione pro $L-l$, $L'-l'$, $L''-l''$ etc. valores ex (2), statuendoque

$$\left.\begin{array}{l} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{C} \end{array}\right\} (4)$$

etc., habebimus

$$K = k + \mathfrak{A}x^\circ + \mathfrak{B}y^\circ + \mathfrak{C}z^\circ \text{ etc.} \qquad (5)$$

Valores quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. per formulas (4) quidem calculare non possumus, quum errores e, e', e'' etc. maneant incogniti; at sponte manifestum est, illos nihil aliud esse, nisi valores functionum X, Y, Z etc., qui prodeunt, si pro v, v', v'' etc. valores obseruati substituuntur. Hoc modo systema aequationum (1), (3), (5) completam problematis nostri solutionem exhibet, quum ea, quae in fine art. 2. de computo quantitatum l, l', l'' etc., valoribus obseruatis quantitatum v, v', v'' etc. superstruendo monuimus, manifesto aequali iure ad computum quantitatum a, a', a'' etc. b, b', b'' etc. etc. extendere liceat.

7.

Loco formulae (3), pondus determinationis maxime plausibilis exprimentis, plures aliae exhiberi possunt, quas euoluere operae pretium erit.

Primo obseruamus, si aequationes (2) resp. per $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. multiplicentur et addantur, prodire

$$[aa]x^\circ + [ab]y^\circ + [ac]z^\circ + \text{etc.} = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \text{etc.}$$

Pars ad laeuam fit $= 0$, partem ad dextram iuxta analogiam per $[aL]$ denotamus: habemus itaque

$$[aL] = 0, \text{ et prorsus simili modo } [bL] = 0,\ [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando porro aequationes (2) deinceps per $\frac{L}{p}$, $\frac{L'}{p'}$, $\frac{L''}{p''}$ etc., et addendo, inuenimus

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.} = \frac{LL}{p} + \frac{L'L'}{p'} + \frac{L''L''}{p''} + \text{etc.}$$

vnde obtinemus expressionem *secundam* pro pondere,

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.}}$$

Denique multiplicando aequationes (2) deinceps per $\frac{l}{p}$, $\frac{l'}{p'}$, $\frac{l''}{p''}$, etc. et addendo, peruenimus ad expressionem *tertiam* ponderis

$$P = \frac{1}{[al]x^\circ + [bl]y^\circ + [cl]z + \text{etc.} + [ll]}$$

si ad instar reliquarum denotationum statuimus

$$\frac{ll}{p} + \frac{l'l'}{p'} + \frac{l''l''}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

Hinc adiumento aequationnm (1) facile fit transitus ad *expressionem quartam*, quam ita exhibemus:

$$\frac{1}{P} = [ll] - [aa]x^\circ x^\circ - [bb]y^\circ y^\circ - [cc]z^\circ z^\circ - \text{etc.}$$
$$- 2[ab]x^\circ y^\circ - 2[ac]x^\circ z^\circ - 2[bc]y^\circ z^\circ - \text{etc.}$$

8.

Solutio generalis, quam hactenus explicauimus, ei potissimum casui adaptata est, vbi *vna* incognita a quantitatibus obseruatis pendens determinanda est. Quoties vero plures incognitae ab iisdem obseruationibus pendentes valores maxime plausibiles exspectant, vel quoties adhuc incertum est, quasnam potissimum incognitas ex obseruationibus deriuare oporteat, has alia ratione praeparare conueniet, cuius euolutionem iam aggredimur.

Considerabimus quantitates x, y, z etc. tamquam indeterminatas, statuemus

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \text{etc.} = \xi \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \text{etc.} = \eta \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \text{etc.} = \zeta \end{array}\right\} \quad (6)$$

etc., supponemusque, per eliminationem hinc sequi

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.} = x \\ [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.} = y \\ [\gamma\alpha]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} = z \end{array}\right\} \quad (7)$$

etc.

Ante omnia hic obseruare oportet, coëfficientes symmetrice positos necessario aequales fieri, puta

$$[\beta\alpha] = [\alpha\beta]$$
$$[\gamma\alpha] = [\alpha\gamma]$$
$$[\gamma\beta] = [\beta\gamma] \text{ etc.}$$

quod quidem e theoria generali eliminationis in aequationibus linearibus sponte sequitur, sed etiam infra, absque illa, directe demonstrabitur.

Habebimus itaque

$$\left.\begin{aligned} x^\circ &= -[\alpha\alpha].[al] - [\alpha\beta].[bl] - [\alpha\gamma].[cl] - \text{etc.}\\ y^\circ &= -[\alpha\beta].[al] - [\beta\beta].[bl] - [\beta\gamma].[cl] - \text{etc.}\\ z^\circ &= -[\alpha\gamma].[al] - [\beta\gamma].[bl] - [\gamma\gamma].[cl] - \text{etc.}\end{aligned}\right\}(8)$$

etc.

vnde, si statuimus

$$\left.\begin{aligned} {}[\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= A\\ [\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= B\\ [\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= C\end{aligned}\right\}\ (9)$$

etc., obtinemus

$$K = k - A[al] - B[bl] - C[cl] - \text{etc.}$$

vel si insuper statuimus

$$\left.\begin{aligned} aA + bB + cC + \text{etc.} &= p\varepsilon\\ a'A + b'B + c'C + \text{etc.} &= p'\varepsilon'\\ a''A + b''B + c''C + \text{etc.} &= p''\varepsilon''\end{aligned}\right\}\ (10)$$

etc., erit

$$K = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \text{etc.} \quad (11)$$

9.

Comparatio aequationum (7), (9) docet, quantitates auxiliares A, B, C etc. esse valores indeterminatarum x, y, z etc. respondentes valoribus indeterminatarum ξ, η, ζ etc. his $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc., vnde patet haberi

$$\left.\begin{aligned}
[aa]A + [ab]B + [ac]C + \text{etc.} &= \mathfrak{A}\\
[ab]A + [bb]B + [bc]C + \text{etc.} &= \mathfrak{B}\\
[ac]A + [bc]B + [cc]C + \text{etc.} &= \mathfrak{C}
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

etc. Multiplicando itaque aequationes (10) resp. per $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. et addendo, obtinemus

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A} = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
&\text{et prorsus simili modo}\\
&\mathfrak{B} = b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
&\mathfrak{C} = c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

etc. Iam quum $\mathfrak{A}$ sit valor functionis X, si pro v, v', v'' etc. valores obseruati substituuntur, facile perspicietur, si his applicentur correctiones $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. resp., functionem X hinc adepturam esse valorem 0, et perinde functiones Y, Z etc. hinc ad valorem euanescentem reductum iri. Simili ratione ex aequatione (11) colligitur, K esse valorem functionis u ex eadem substitutione emergentem.

Applicationem correctionum $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. ad obseruationes, vocabimus *obseruationum compensationem*, manifestoque deducti sumus ad conclusionem grauissimam, puta, obseruationes eo quem docuimus modo compensatas omnibus aequationibus conditionalibus exacte satisfacere, atque cuilibet quantitati ab obseruationibus quomodocunque pendenti eum ipsum valorem conciliare, qui ex obseruationum non mutatarum combinatione maxime idonea emergeret. Quum itaque impossibile sit, errores ipsos e, e', e'' etc. ex aequationibus conditionalibus eruere, quippe quarum multitudo haud sufficit, saltem *errores maxime plausibiles* nacti sumus, qua denominatione quantitates ε, ε', ε'' etc. designare licebit.

10.

Quum multitudo obseruationum maior esse supponatur multitudine aequationum conditionalium, praeter systema correctionum maxime plausibilium $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. infinite multa alia inueniri possunt, quae aequationibus conditionalibus satisfaciant, operaeque pretium est indagare, quomodo haec ad illud se habeant. Constituant itaque $-E$, $-E'$, $-E''$ etc. tale systema a maxime plausibili diuersum, habebimusque

$$aE + a'E' + a''E'' + \text{etc.} = \mathfrak{A}$$
$$bE + b'E' + b''E'' + \text{etc.} = \mathfrak{B}$$
$$cE + c'E' + c''E'' + \text{etc.} = \mathfrak{C}$$

etc. Multiplicando has aequationes resp. per A, B, C etc. et addendo, obtinemus adiumento aequationum (10)

$$p\varepsilon E + p'\varepsilon'E' + p''\varepsilon''E'' + \text{etc.} = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

Prorsus vero simili modo aequationes (13) suppeditant

$$p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.} = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \text{etc.} \quad (14)$$

E combinatione harum duarum aequationum facile deducitur

$$pEE + p'E'E' + p''E''E'' + \text{etc.} = p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$+ p(E-\varepsilon)^2 + p'(E'-\varepsilon')^2 + p''(E''-\varepsilon'')^2 + \text{etc.}$$

Aggregatum $pEE + p'E'E' + p''E''E'' +$ etc. itaque necessario *maius* erit aggregato $p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' +$ etc., quod enunciari potest tamquam

Theorema. Aggregatum quadratorum correctionum, per quas obseruationes cum aequationibus conditionalibus conciliare licet, per pondera obseruationum resp. multiplicatorum, fit minimum, si correctiones maxime plausibiles adoptantur.

Hoc est ipsum principium quadratorum minimorum, ex quo etiam aequationes (12), (10) facile immediate deriuari possunt. Ceterum pro hoc aggregato minimo, quod in sequentibus per S denotabimus, aequatio (14) nobis suppeditat expressionem $\mathfrak{A}A + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} +$ etc.

11.

Determinatio errorum maxime plausibilium, quum a coëfficientibus l, l', l'' etc. independens sit, manifesto praeparationem commodissimam sistit, ad quemuis vsum, in quem obseruationes vertere placuerit. Praeterea perspicuum est, ad illud negotium haud opus esse eliminatione *indefinita* seu cognitione coëfficientium $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc., nihilque aliud requiri, nisi vt quantitates auxiliares A, B, C etc., quas in sequentibus *correlata* aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. vocabimus, ex aequationibus (12) per eliminationem definitam eliciantur atque in formulis (10) substituantur.

Quamquam vero haec methodus nihil desiderandum linquat, quoties quantitatum ab obseruationibus pendentium valores maxime plausibiles tantummodo requiruntur, tamen res secus se habere videtur, quoties insuper pondus alicuius determinationis in votis est, quum ad hunc finem, prout hoc vel illa quatuor expressionum supra traditarum vti placuerit, cognitio quantitatum L, L', L'' etc., vel saltem cognitio harum x^0, y^0, z^0 etc. necessaria videatur. Hac ratione vtile erit, negotium eliminationis accuratius perscrutari, vnde via facilior ad pondera quoque inuenienda se nobis aperiet.

12.

Nexus quantitatum in hac disquisitione occurrentium haud parum illustratur per introductionem functionis indefinitae secundi ordinis

$$[aa]xx + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.} + [bb]yy$$
$$+ 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]zz + \text{etc.}$$

quam per T denotabimus. Primo statim obuium est, hanc functionem fieri

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.})^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.})^2}{p'}$$
$$+ \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.})^2}{p''} + \text{etc.} \quad (15)$$

Porro patet esse

$$T = x\xi + y\eta + z\zeta + \text{etc.} \quad (16)$$

et si hic denuo x, y, z etc. adiumento aequationum (7) per ξ, η, ζ etc. exprimuntur,

$$T = [\alpha\alpha]\xi\xi + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \text{etc.} + [\beta\beta]\eta\eta$$
$$+ 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + [\gamma\gamma]\zeta\zeta + \text{etc.}$$

Theoria supra euoluta bina systemata valorum determinatorum quantitatum x, y, z etc., atque ξ, η, ζ etc. continet; priori, in quo $x = x^0, y = y^0, z = z^0$ etc. $\xi = -[al]$, $\eta = -[bl]$, $\zeta = -[cl]$ etc., respondebit valor ipsius T hic,

$$T = [ll] - \frac{1}{P}$$

quod vel per expressionem tertiam ponderis P cum aequatione (16) comparatam, vel per quartam sponte elucet; posteriori, in quo $x = A, y = B, z = C$ etc., atque $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc., respondet valor $T = S$, vti vel e formulis (10) et (15), vel ex his (14) et (16) manifestum est.

13.

Iam negotium principale consistit in transformatione functionis T ei simili, quam in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 182 atque fusius in Disquisitione de elementis ellipticis Palladis exposuimus. Scilicet statuemus (17)

$$[bb, 1] = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}$$

$$[bc, 1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

$$[bd, 1] = [bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$$

etc.

$$[cc, 2] = [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]}$$

$$[cd, 2] = [cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \frac{[bc, 1]\,[bd, 1]}{[bb, 1]}$$

etc.

$$[dd, 3] = [dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]} - \frac{[bd, 1]^2}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2]^2}{[cc, 2]}$$

etc. etc. Dein statuendo *)

$$\begin{aligned} [bb,1]y + [bc, 1]z + [bd, 1]w + \text{etc.} &= \eta' \\ [cc, 2]z + [cd, 2]w + \text{etc.} &= \zeta'' \\ [dd, 3]w + \text{etc.} &= \varphi''' \end{aligned}$$

etc., erit

$$T = \frac{\xi\xi}{[aa]} + \frac{\eta'\eta'}{[bb, 1]} + \frac{\zeta''\zeta''}{[cc, 2]} + \frac{\varphi'''\varphi'''}{[dd, 3]} + \text{etc.}$$

quantitatesque η', ζ'', φ''' etc. a ξ, η, ζ, φ etc. pendebunt per aequationes sequentes:

$$\eta' = \eta - \frac{[ab]}{[aa]}\xi$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{[ac]}{[aa]}\xi - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]}\eta'$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{[ad]}{[aa]}\xi - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]}\eta' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]}\zeta''$$

etc.

Facile iam omnes formulae ad propositum nostrum necessariae hinc desumuntur. Scilicet ad determinationem correlatorum A, B, C etc. statuemus (18)

---

*) In praecedentibus sufficere poterant ternae literae pro variis systematibus quantitatum ad tres primas aequationes conditionales referendae: hoc vero loco, vt algorithmi lex clarius eluceat, quartam adiungere visum est; et quum in serie naturali literas a, b, c; A, B, C; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sponte sequantur d, D, $\mathfrak{D}$, in serie x, y, z, deficiente alphabeto, apposuimus w, nec non in hac ξ, η, ζ hanc φ.

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{C}'' = \mathfrak{C} - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,\mathfrak{A} - \frac{[b\,c,\,1]}{[b\,b,\,1]}\,\mathfrak{B}'$$

$$\mathfrak{D}''' = \mathfrak{D} - \frac{[a\,d]}{[a\,a]}\,\mathfrak{A} - \frac{[b\,d,\,1]}{[b\,b,\,1]}\,\mathfrak{B}' - \frac{[c\,d,\,2]}{[c\,c,\,2]}\,\mathfrak{C}''$$

etc., ac dein A, B, C, D etc. eruentur per formulas sequentes, et quidem ordine inuerso, incipiendo ab vltima,

$$\left.\begin{array}{r}
[aa]A + [ab]B + [ac]C + [ad]D + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\
[bb,1]B + [bc,1]C + [bd,1]D + \text{etc.} = \mathfrak{B}' \\
[cc,2]C + [cd,2]D + \text{etc.} = \mathfrak{C}'' \\
[dd,3]D + \text{etc.} = \mathfrak{D}''' \\
\text{etc.}\qquad\qquad\quad
\end{array}\right\}\quad(19)$$

Pro aggregato S autem habemus formulam nouam (20)

$$S = \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}}{[a\,a]} + \frac{\mathfrak{B}'\,\mathfrak{B}'}{[bb,1]} + \frac{\mathfrak{C}''\,\mathfrak{C}''}{[cc,2]} + \frac{\mathfrak{D}'''\,\mathfrak{D}'''}{[dd,\,3]}\ \text{etc.}$$

Denique si pondus P, quod determinationi maxime plausibili quantitatis per functionem u expressae tribuendum est, desideratur, faciemus (21)

$$[b\,l,\,1] = [b\,l] - \frac{[ab]\,[a\,l]}{[a\,a]}$$

$$[c\,l,\,2] = [c\,l] - \frac{[a\,c]\,[a\,l]}{[a\,a]} - \frac{[bc,\,1]\,[bl,\,1]}{[b\,b,\,1]}$$

$$[d\,l,\,3] = [d\,l] - \frac{[a\,d]\,[a\,l]}{[a\,a]} - \frac{[b\,d,\,1]\,[b\,l,\,1]}{[b\,b,\,1]} - \frac{[c\,d,\,2]\,[c\,l,\,2]}{[c\,c,\,2]}$$

etc., quo facto erit (22)

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l,1]^2}{[b\,b,\,1]} - \frac{[c\,l,\,2]^2}{[c\,c,\,2]} - \frac{[d\,l,\,3]^2}{[d\,d,\,3]} - \text{etc.}$$

Formulae (17) . . . . (22), quarum simplicitas nihil desiderandum relinquere videtur, solutionem problematis nostri ab omni parte completam exhibent.

14.

Postquam problemata primaria absoluimus, adhuc quasdam quaestiones secundarias attingemus, quae huic argumento maiorem lucem affundent.

Primo inquirendum est, num eliminatio, per quam x, y, z etc. ex ξ, η, ζ etc. deriuare oportet, vmquam impossibilis fieri possit. Manifesto hoc eueniret, si functiones ξ, η, ζ etc. inter se haud independentes essent. Supponamus itaque aliquantisper, vnam earum per reliquas iam determinari, ita vt habeatur aequatio identica

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} = 0$$

denotantibus α, β, γ etc. numeros determinatos. Erit itaque

$$\begin{aligned}
\alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{etc.} &= 0\\
\alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{etc.} &= 0\\
\alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., vnde, si statuimus

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} &= p\,\Theta\\
\alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} &= p'\,\Theta'\\
\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} &= p''\,\Theta''
\end{aligned}$$

etc., sponte sequitur

$$\begin{aligned}
a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} &= 0\\
b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} &= 0\\
c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., nec non

$$p\Theta\Theta + p'\Theta'\Theta' + p''\Theta''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

quae aequatio, quum omnes p, p', p'' etc. natura sua sint quantitates positiuae, manifesto consistere nequit, nisi fuerit $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc.

Iam consideremus valores differentialium completorum $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}Y$, $\mathrm{d}Z$ etc., respondentes valoribus iis quantitatum v, v', v'' etc., ad quos referuntur obseruationes. Haec differentialia, puta

$$a\,\mathrm{d}v + a'\,\mathrm{d}v' + a''\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$b\,\mathrm{d}v + b'\,\mathrm{d}v' + b''\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$c\,\mathrm{d}v + c'\,\mathrm{d}v' + c''\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$

etc., per conclusionem, ad quam modo delati sumus, inter se ita dependentia erunt, vt per α, β, γ etc. resp. multiplicata aggregatum identice euanescens producant, siue quod idem est, quoduis ex ipsis (cui quidem respondet multiplicator α, β, γ etc. non euanescens) sponte euanescet, simulac omnia reliqua euanescere supponuntur. Quamobrem ex aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., vna (ad minimum) pro *superflua* habenda est, quippe cui sponte satisfit, simulac reliquis satisfactum est.

Ceterum si res profundius inspicitur, apparet, hanc conclusionem per se tantum pro ambitu infinite paruo variabilitatis indeterminatarum valere. Scilicet proprie duo casus distinguendi erunt, alter, vbi vna aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. absolute et generaliter iamiam in reliquis contenta est, quod facile in quouis casu auerti poterit; alter, vbi, quasi fortuito, pro iis valoribus concretis quantitatum v, v', v'' etc., ad quos obseruationes referuntur, vna functionum X, Y, Z etc. e. g. prima X, valorem maximum vel minimum (vel generalius, stationarium) nanciscitur respectu mutationum omnium, quas quantitatibus v, v', v'' etc., saluis aequationibus $Y = 0$, $Z = 0$ etc., applicare possemus. Attamen quum in disquisitione nostra variabilitas quantitatum tantummodo intra limites tam arctos consideretur, vt ad instar infinite paruae tractari possit, hic casus secundus (qui in praxi vix vmquam occurret) eundem effectum habebit, quem primus, puta vna aequationum conditionalium tamquam superflua reiicienda erit, certique esse possumus, si omnes aequationes conditionales retentae eo sensu quem hic intelligimus ab inuicem independentes sint, eliminationem necessario fore possibilem. Ceterum disquisitionem vberiorem, qua hoc argumentum, propter theoreticam subtilitatem potius quam practicam vtilitatem haud indignum est, ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.

15.

In commentatione priori art. 37 sqq. methodum docuimus, obseruationum praecisionem a posteriori quam proxime eruendi. Scilicet si valores approximati π quantitatum per obseruationes aequali praecisione gaudentes innotuerunt, et cum valoribus iis comparantur, qui e valoribus maxime plausibilibus ρ elementorum, a quibus illae pendent, per calculum prodeunt: differentiarum quadrata addere, aggregatumque per $\pi - \rho$ diuidere oportet, quo facto quotiens considerari poterit tamquam valor approximatus quadrati erroris medii tali obseruationum generi inhaerentis. Quoties obseruationes inaequali praecisione gaudent, haec praecepta eatenus tantum mutanda sunt, vt quadrata ante additionem per obseruationum pondera multiplicari debeant, errorque medius hoc modo prodiens ad obseruationes referatur, quarum pondus pro vnitate acceptum est.

Iam in tractatione praesente illud aggregatum manifesto quadrat cum aggregato S, differentiaque $\pi - \rho$ cum multitudine aequationum conditionalium σ, quamobrem pro errore medio obseruationum, quarum pondus $= 1$, habebimus expressionem $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$, quae determinatio eo maiori fide digna erit, quo maior fuerit numerus σ.

Sed operae pretium erit, hoc etiam independenter a disquisitione priori stabilire. Ad hunc finem quasdam nouas denotationes introducere conueniet. Scilicet respondeant valoribus indeterminatarum ξ, η, ζ etc. his

$$\xi = a,\ \eta = b,\ \zeta = c \text{ etc.}$$

valores ipsarum x, y, z etc. hi

$$x = \alpha, \; y = \beta, \; x = \gamma \text{ etc.}$$

ita vt habeatur

$$\alpha = a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$
$$\beta = a[\alpha\beta] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \text{etc.}$$
$$\gamma = a[\alpha\gamma] + b[\beta\gamma] + c[\gamma\gamma] + \text{etc.}$$

etc. Perinde valoribus

$$\xi = a', \; \eta = b', \; \zeta = c' \text{ etc.}$$

respondere supponemus hos

$$x = \alpha', \; y = \beta', \; z = \gamma' \text{ etc.}$$

nec non his

$$\xi = a'', \; \eta = b'', \; \zeta = c'' \text{ etc.}$$

sequentes

$$x = \alpha'', \; y = \beta'', \; z = \gamma'' \text{ etc.}$$

et sic porro.

His positis combinatio aequationum (4), (9) suppeditat

$$A = \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}$$
$$B = \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}$$
$$C = \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}$$

etc. Quare quum habeatur $S = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.}$, patet fieri

$$S = (ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})\,(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.})$$
$$+ (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})\,(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.})$$
$$+ (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})\,(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

16.

Institutionem obseruationum, per quas valores quantitatum v, v', v'' etc. erroribus fortuitis e, e', e'' etc. affectos obtinemus, considerare possumus tamquam experimentum, quod quidem singulorum errorum commissorum magnitudinem docere non valet, attamen, praeceptis quae supra explicauimus adhibitis, valorem quantitatis S subministrat, qui per formulam modo inuentam est functio data illorum errorum. In tali experimento errores fortuiti vtique alii maiores alii minores prodire possunt; sed quo plures errores concurrunt, eo maior spes aderit, valorem quantitatis S in experimento singulari a valore suo medio parum deuiaturum esse. Rei cardo itaque in eo vertitur, vt valorem medium quantitatis S stabiliamus. Per principia in commentatione priori exposita, quae hic repetere superfluum esset, inuenimus hunc valorem medium

$$= (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})mm + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})m'm' \\ + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})m''m'' + \text{etc.}$$

Denotando errorem medium obseruationum talium, quarum pondus $= 1$, per μ, ita vt sit $\mu\mu = pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc., expressio modo inuenta ita exhiberi potest:

$$\left(\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} \text{ etc.}\right)\mu\mu + \left(\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu\mu \\ + \left(\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu\mu + \text{etc.}$$

Sed aggregatum $\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}$ inuenitur

$$= [aa].[a\alpha] + [ab].[\alpha\beta] + [ac].[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$

adeoque $= 1$, vti e nexu aequationum (6), (7) facile intelligitur. Perinde fit

$$\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

$$\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

et sic porro.

Hinc tandem valor medius ipsius S fit $= \sigma\mu\mu$, quatenusque igitur valorem fortuitum ipsius S pro medio adoptare licet, erit $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$.

17.

Quanta fides huic determinationi habenda sit, diiudicare oportet per errorem medium vel in ipsa vel in ipsius quadrato metuendum: posterior erit radix quadrata valoris medii expressionis

$$\left(\frac{S}{\sigma} - \mu\mu\right)^2$$

cuius euolutio absoluetur per ratiocinia similia iis, quae in commentatione priori artt. 39 sqq. exposita sunt. Quibus breuitatis caussa hic suppressis, formulam ipsam tantum hic apponimus. Scilicet error medius in determinatione quadrati $\mu\mu$ metuendus exprimitur per

$$\surd\left(\frac{2\mu^4}{\sigma} + \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\sigma\sigma}.N\right)$$

denotante ν^4 valorem medium biquadratorum errorum, quorum pondus $= 1$, atque N aggregatum

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 \text{ etc.}$$

Hoc aggregatum in genere ad formam simpliciorem reduci nequit, sed simili modo vt in art. 40. prioris commentationis ostendi potest, eius valorem semper contineri intra limites π et $\frac{\sigma\sigma}{\pi}$. In hypothesi ea, cui theoria quadratorum minimorum ab initio superstructa erat, terminus hoc aggregatum continens, propter $\nu^4 = 3\mu^4$, omnino excidit, praecisioque, quae errori medio, per formulam $\surd\frac{S}{\sigma}$ determinato, tribuenda est, eadem erit, ac si ex σ erroribus exacte cognitis secundum artt. 15, 16 prioris commentationis erutus fuisset.

18.

Ad compensationem obseruationum duo, vt supra vidimus, requiruntur: primum, vt aequationum conditionalium correlata, i. e. numeri A, B, C etc. aequationibus (12) satisfacientes eruantur, secundum, vt hi numeri in aequationibus (10) substituantur. Compensatio hoc modo prodiens dici poterit *perfecta* seu *completa*, vt distinguatur a compensatione *imperfecta* seu *manca*: hac scilicet denominatione designabimus, quae resultant ex iisdem quidem aequationibus (10), sed substratis valoribus quantitatum A, B, C etc., qui non satisfaciunt aequationibus (12), i. e. qui vel parti tantum satisfaciunt vel nullis. Quod vero attinet ad tales obseruationum mutationes, quae sub formulis (10) comprehendi nequeunt, a disquisitione praesente, nec non a denominatione compensationum exclusae sunto. Quum, quatenus aequationes (10) locum habent, aequationes (13) ipsis (12) omnino sint aequiualentes, illud discrimen ita quoque enunciari potest: Obseruationes complete compensatae omnibus aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. satisfaciunt, incomplete compensatae vero vel nullis vel saltem non omnibus; compensatio itaque, per quam omnibus aequationibus conditionalibus satisfit, necessario est ipsa completa.

19.

Iam quum ex ipsa notione compensationis sponte sequatur, aggregata duarum compensationum iterum constituere compensationem, facile perspicitur, nihil interesse, vtrum praecepta, per quae compensatio perfecta eruenda est, immediate ad obseruationes primitiuas applicentur, an ad obseruationes incomplete iam compensatas.

Reuera constituant $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$ etc. systema compensationis incompletae, quod prodierit e formulis (I)

$$\Theta p = A^\circ a + B^\circ b + C^\circ c + \text{etc.}$$
$$\Theta' p' = A^\circ a' + B^\circ b' + C^\circ c' + \text{etc.}$$
$$\Theta'' p'' = A^\circ a'' + B^\circ b'' + C^\circ c'' + \text{etc.}$$

etc.

Quum obseruationes his compensationibus mutatae omnibus aequationibus conditionalibus non satisfacere supponantur, sint $\mathfrak{A}^\circ$, $\mathfrak{B}^\circ$, $\mathfrak{C}^\circ$

etc. valores, quos X, Y, Z etc. ex illarum substitutione nanciscuntur. Quaerendi sunt numeri $A^{\circledast}$, $B^{\circledast}$, $C^{\circledast}$ etc. aequationibus (II) satisfacientes

$$\mathfrak{A}^{\circledast} = A^{\circledast}[aa] + B^{\circledast}[ab] + C^{\circledast}[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}^{\circledast} = A^{\circledast}[ab] + B^{\circledast}[bb] + C^{\circledast}[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}^{\circledast} = A^{\circledast}[ac] + B^{\circledast}[bc] + C^{\circledast}[cc] + \text{etc.}$$

etc., quo facto compensatio completa obseruationum isto modo mutatarum efficitur per mutationes nouas $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc., vbi $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. computandae sunt per formulas (III)

$$\varkappa p = A^{\circledast} a + B^{\circledast} b + C^{\circledast} c + \text{etc.}$$
$$\varkappa' p' = A^{\circledast} a' + B^{\circledast} b' + C^{\circledast} c' + \text{etc.}$$
$$\varkappa'' p'' = A^{\circledast} a'' + B^{\circledast} b'' + C^{\circledast} c'' + \text{etc.}$$

etc. Iam inquiramus, quomodo hae correctiones cum compensatione completa obseruationum primitiuarum cohaereant. Primo manifestum est haberi

$$\mathfrak{A}^{\circledast} = \mathfrak{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}^{\circledast} = \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}^{\circledast} = \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \text{etc.}$$

etc. Substituendo in his aequationibus pro Θ, Θ', Θ'' etc. valores ex (I), nec non pro $\mathfrak{A}^{\circledast}$, $\mathfrak{B}^{\circledast}$, $\mathfrak{C}^{\circledast}$ etc. valores ex II, inuenimus

$$\mathfrak{A} = (A^{\circ} + A^{\circledast})[aa] + (B^{\circ} + B^{\circledast})[ab] + (C^{\circ} + C^{\circledast})[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^{\circ} + A^{\circledast})[ab] + (B^{\circ} + B^{\circledast})[bb] + (C^{\circ} + C^{\circledast})[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^{\circ} + A^{\circledast})[ac] + (B^{\circ} + B^{\circledast})[bc] + (C^{\circ} + C^{\circledast})[cc] + \text{etc.}$$

etc., vnde patet, correlata aequationum conditionalium aequationibus (12) satisfacientia esse

$$A = A^{\circ} + A^{\circledast},\; B = B^{\circ} + B^{\circledast},\; C = C^{\circ} + C^{\circledast} \text{ etc.}$$

Hinc vero aequationes (10), I et III docent, esse

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa,\; \varepsilon' = \Theta' + \varkappa',\; \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

i. e. compensatio obseruationum perfecta eadem prodit, siue immediate computetur, siue mediate proficiscendo a compensatione manca.

20.

Quoties multitudo aequationum conditionalium permagna est, determinatio correlatorum A, B, C etc. per eliminationem directam tam prolixa euadere potest, vt calculatoris patientia ei impar sit: tunc saepenumero commodum esse poterit, compensationem completam per approximationes successiuas adiumento theorematis art. praec. eruere. Distribuantur aequationes conditionales in duas pluresue classes, inuestigeturque primo compensatio, per quam aequationibus primae classis satisfit, neglectis reliquis. Dein tractentur obseruationes per hanc compensationem mutatae ita, vt solarum aequationum secundae classis ratio habeatur. Generaliter loquendo applicatio secundi compensationum systematis consensum cum aequationibus primae classis turbabit; quare, si duae tantummodo classes factae sunt, ad aequationes primae classis reuertemur, tertiumque systema quod huic satisfaciat eruemus; dein obseruationes ter correctas compensationi quartae subiiciemus, vbi solae aequationes secundae classis respiciuntur. Ita alternis vicibus, modo priorem classem modo posteriorem respicientes, compensationes continuo decrescentes obtinebimus, et si distributio scite adornata fuerat, post paucas iterationes ad numeros stabiles perueniemus. Si plures quam duae classes factae sunt, res simili modo se habebit: classes singulae deinceps in computum venient, post vltimam iterum prima et sic porro. Sed sufficiat hoc loco, hunc modum addigitauisse, cuius efficacia multum vtique a scita applicatione pendebit.

21.

Restat, vt suppleamus demonstrationem lemmatis in art. 8 suppositi, vbi tamen perspicuitatis caussa alias denotationes huic negotio magis adaptatas adhibebimus.

Sint itaque x°, x', x'', x''' etc. indeterminatae, supponamusque, ex aequationibus

$$\begin{aligned}
n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.} &= X^0\\
n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.} &= X'\\
n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.} &= X''\\
n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.} &= X'''\\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

sequi per eliminationem has

$$\begin{aligned}
N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + N^{03}X''' + \text{etc.} &= x^0\\
N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + N^{13}X''' + \text{etc.} &= x'\\
N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + N^{23}X''' + \text{etc.} &= x''\\
N^{30}X^0 + N^{31}X' + N^{32}X'' + N^{33}X''' + \text{etc.} &= x'''\\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

Substitutis itaque in aequatione prima et secunda secundi systematis valoribus quantitatum X, X', X'', X''' etc. e primo systemate, obtinemus

$$\begin{aligned}
x^0 = {} & N^{00}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.})
\end{aligned}$$

etc., nec non

$$\begin{aligned}
x' = {} & N^{10}(n^{00}x + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{11}(n^{10}x + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{12}(n^{20}x + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{13}(n^{30}x + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.})\\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

Quum vtraque aequatio manifesto esse debeat aequatio identica, tum in priori tum in posteriori pro x^0, x', x'', x''' etc. valores quoslibet determinatos substituere licebit. Substituamus in priori

$$x^0 = N^{10},\ x' = N^{11},\ x'' = N^{12},\ x''' = N^{13} \text{ etc.}$$

in posteriori vero

$$x^0 = N^{00},\ x' = N^{01},\ x'' = N^{02},\ x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

His ita factis subtractio producit

$$\begin{aligned}N^{10} - N^{01} = &(N^{00}N^{11} - N^{10}N^{01})(n^{01} - n^{10})\\ &+ (N^{00}N^{12} - N^{10}N^{02})(n^{02} - n^{20})\\ &+ (N^{00}N^{13} - N^{10}N^{03})(n^{03} - n^{30})\\ &+ \text{etc.}\\ &+ (N^{01}N^{12} - N^{11}N^{02})(n^{12} - n^{21})\\ &+ (N^{01}N^{13} - N^{11}N^{03})(n^{13} - n^{31})\\ &+ \text{etc.}\\ &+ (N^{02}N^{13} - N^{12}N^{03})(n^{23} - n^{32})\\ &+ \text{etc. etc.}\end{aligned}$$

quae aequatio ita quoque exhiberi potest

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma\,(N^{0\alpha}N^{1\beta} - N^{1\alpha}N^{0\beta})(n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha})$$

denotantibus $\alpha\ \beta$ omnes combinationes indicum inaequalium.

Hinc colligitur, si fuerit $n^{01} = n^{10}$, $n^{02} = n^{20}$, $n^{03} = n^{30}$, $n^{12} = n^{21}$, $n^{13} = {}^{31}$, $n^{23} = n^{32}$, etc., siue generaliter $n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$, fore etiam

$$N^{10} = N^{01}$$

Et quum ordo indeterminatarum in aequationibus propositis sit arbitrarius, manifesto, in illa suppositione erit generaliter

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}$$

22.

Quum methodus in hac commentatione exposita applicationem imprimis frequentem et commodam inueniat in calculis ad geodaesiam sublimiorem pertinentibus, lectoribus gratam fore speramus illustrationem praeceptorum per nonnulla exempla hinc desumta.

Aequationes conditionales inter angulos systematis triangulorum e triplici potissimum fonte sunt petendae.

I. Aggregatum angulorum horizontalium, qui circa eundem verticem gyrum integrum horizontis complent, aequare debet quatuor rectos.

II. Summa trium angulorum in quouis triangulo quantitati datae aequalis est, quum, quoties triangulum est in superficie curua, excessum illius summae supra duos rectos tam accurate computare liceat, vt pro absolute exacto haberi possit.

III. Fons tertius est ratio laterum in triangulis catenam clausam formantibus. Scilicet si series triangulorum ita nexa est, vt secundum triangulum habeat latus vnum a commune cum triangulo primo, aliud b cum tertio; perinde quartum triangulum cum tertio habeat latus commune c, cum quinto latus commune d, et sic porro vsque ad vltimum triangulum, cui cum praecedente latus commune sit k, et cum triangulo primo rursus latus l, valores quotientium $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}$ .... $\frac{l}{k}$, innotescent resp. e binis angulis triangulorum successiuorum, lateribus communibus oppositis, per methodos notas, vnde quum productum illarum fractionum fieri debeat $= 1$, prodibit aequatio conditionalis inter sinus illorum angulorum, (parte tertia excessus sphaerici vel sphaeroidici, si triangula sunt in superficie curua, resp. diminutorum).

Ceterum in systematibus triangulorum complicatioribus saepissime accidit, vt aequationes conditionales tum secundi tum tertii generis plures se offerant, quam retinere fas est, quoniam pars earum in reliquis iam contenta est. Contra rarior erit casus, vbi aequationibus conditionalibus secundi generis adiungere oportet aequationes similes ad figuras plurium laterum spectantes, puta tunc tantum, vbi polygona formantur, in triangula per mensurationes non diuisa. Sed de his rebus ab instituto praesente nimis alienis, alia occasione fusius agemus. Silentio tamen praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per v, v', v'' etc. designatas reuera vel immediate obseruatas esse, vel ex obseruationibus ita deriuatas, vt inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi vulgari obseruantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro v, v', v'' etc. accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper contineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate obseruati, sed prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum reuera obseruatorum, illos non inter obseruatorum numerum referendos, sed in forma compositionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo obseruandi ei simili, quem sequutus est clar. Struve (Astronomische Nachrichten II, p.431), vbi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinentur per comparationem cum vna eademque directione arbitraria. Tunc scilicet hi ipsi anguli pro v, v', v'' etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam superfluae cessabunt. Modus obseruationis, quem ipse sequutus sum in dimensione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a priori tum a posteriori modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari potest, ita vt in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus v, v', v'' etc. accipere oporteat. Duo iam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem, alterum ad posteriorem pertinens.

23.

Exemplum primum nobis suppeditabit opus clar. de Krayenhof, *Précis historique des operations trigonometriques faites en Hollande*, et quidem compensationi subiiciemus partem eam systematis triangulorum, quae inter nouem puncta Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde, Gröningen continentur. Formantur inter haec puncta nouem triangula in opera illo per numeros 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 denotata, quorum anguli (a nobis indicibus praescriptis distincta) secundum tabulam p. 77–81 ita sunt obseruati:

Triangulum 121.			
0. Harlingen	50°	58′	15″238
1. Leeuwarden	82	47	15,351
2. Ballum	46	14	27,202
Triangulum 122.			
3. Harlingen	51	5	39,717
4. Sneek	70	48	33,445
5. Leeuwarden	58	5	48,707
Triangulum 123.			
6. Sneek	49	30	40,051
7. Drachten	42	52	59,382
8. Leeuwarden	87	36	21,057
Triangulum 124.			
9. Sneek	45	36	7,492
10. Oldeholtpade	67	52	0,048
11. Drachten	66	31	56,513
Triangulum 125.			
12. Drachten	53	55	24,745
13. Oldeholtpade . . .	47	48	52,580
14. Oosterwolde	78	15	42,347
Triangulum 127.			
15. Leeuwarden	59	24	0,645
16. Dockum	76	34	9,021
17. Ballum	44	1	51,040
Triangulum 128.			
18. Leeuwarden	72	6	32,043
19. Drachten	46	53	27,163
20. Dockum	61	0	4,494

Triangulum 131

21. Dockum	57°	1′	55″292
22. Drachten	83	33	14,515
23. Gröningen	39	24	52,397

Triangulum 132

24. Oosterwolde . . .	81	54	17,447
25. Gröningen	31	52	46,094
26. Drachten	66	12	57,246

Consideratio nexus inter haec triangula monstrat, inter 27 angulos, quorum valores approximati per obseruationem innotuerunt, 13 aequationes conditionales haberi, puta duas primi generis, novem secundi, duas tertii. Sed haud opus erit, has aequationes omnes in forma sua finita hic adscribere, quum ad calculos tantummodo requirantur quantitates in theoria generali per $\mathfrak{A}$, a, a', a'' etc., $\mathfrak{B}$, b, b', b'' etc. etc. denotatae: quare illarum loco statim adscribimus aequationes supra per (13) denotatas, quae illas quantitates ob oculos ponunt: loco signorum ε, ε', ε'' etc. simpliciter hic scribemus (0), (1), (2) etc.

Hoc modo duabus aequationibus conditionalibus primi generis respondent sequentes:

$$(1) + (5) + (8) + (15) + (18) = -2''197$$
$$(7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) = -0''436$$

Excessus sphaeroidicos nouem triangulorum inuenimus deinceps: 1″749; 1″147; 1″243; 1″698; 0″873; 1″167; 1″104; 2″161; 1″403. Oritur itaque aequatio conditionalis secundi generis prima haec *): $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180°\ 0'\ 1''749 = 0$, et perinde reliquae: hinc habemus nouem aequationes sequentes:

*) Indices in hoc exemplo per figuras arabicas exprimere praeferimus.

$$\begin{aligned}
(0) + (1) + (2) &= -\,3''958\\
(3) + (4) + (5) &= +\,0,722\\
(6) + (7) + (8) &= -\,0,753\\
(9) + (10) + (11) &= +\,2,355\\
(12) + (13) + (14) &= -\,1,201\\
(15) + (16) + (17) &= -\,0,461\\
(18) + (19) + (20) &= +\,2,596\\
(21) + (22) + (23) &= +\,0,043\\
(24) + (25) + (26) &= -\,0,616
\end{aligned}$$

Aequationes conditionales tertii generis commodius in forma logarithmica exhibentur: ita prior est

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(0)} - 0''583) - \log\sin(v^{(2)} - 0''583) - \log\sin(v^{(3)} - 0''382)\\
&+ \log\sin(v^{(4)} - 0''382) - \log\sin(v^{(6)} - 0''414) + \log\sin(v^{(7)} - 0''414)\\
&- \log\sin(v^{(16)} - 0''389) + \log\sin(v^{(17)} - 0''389) - \log\sin(v^{(19)} - 0''368)\\
&+ \log\sin(v^{(20)} - 0''368) = 0
\end{aligned}$$

Superfluum videtur, alteram in forma finita adscribere. His duabus aequationibus respondent sequentes, vbi singuli coëfficientes referuntur ad figuram septimam logarithmorum briggicorum:

$$\begin{aligned}
17,068(0) &- 20,174(2) - 16,993(3) + 7,328(4) - 17,976(6)\\
&+ 22,672(7) - 5,028(16) + 21,780(17) - 19,710(19)\\
&+ 11,671(20) = -\,371
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17,976(6) &- 0,880(8) - 20,617(9) + 8,564(10) - 19,082(13)\\
&+ 4,375(14) + 6,798(18) - 11,671(20) + 13,657(21)\\
&- 25,620(23) - 2,995(24) + 33,854(25) = +\,370
\end{aligned}$$

Quum nulla ratio indicata sit, cur obseruationibus pondera inaequalia tribuamus, statuemus $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$. Denotatis itaque correlatis aequationum conditionalium eo ordine, quo aequationes ipsis respondentes exhibuimus, per $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N$, prodeunt ad illorum determinationem aequationes sequentes:

$$-2''197 = 5A + C + D + E + H + I + 5{,}917\,N$$
$$-0{,}436 = 6B + E + F + G + I + K + L + 2{,}962\,M$$
$$-3{,}958 = A + 3C - 3{,}106\,M$$
$$+0{,}722 = A + 3D - 9{,}665\,M$$
$$-0{,}753 = A + B + 3E + 4{,}696\,M + 17{,}096\,N$$
$$+2{,}355 = B + 3F - 12{,}053\,N$$
$$-1{,}201 = B + 3G - 14{,}707\,N$$
$$-0{,}461 = A + 3H + 16{,}752\,M$$
$$+2{,}596 = A + B + 3I - 8{,}039\,M - 4{,}874\,N$$
$$+0{,}043 = B + 3K - 11{,}963\,N$$
$$-0{,}616 = B + 3L + 30{,}859\,N$$
$$\begin{aligned}-371 = {} & +2{,}962B - 3{,}106\,C - 9{,}665\,D + 4{,}696\,E \\ & + 16{,}752\,H - 8{,}039\,I + 2902{,}27\,M - 459{,}33\,N\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}+370 = {} & +5{,}917A + 17{,}096E - 12{,}053F - 14{,}707\,G - 4{,}874\,I \\ & - 11{,}963K + 30{,}859L - 459{,}33\,M + 3385{,}96\,N\end{aligned}$$

Hinc eruimus per eliminationem:

$A = -0{,}598$	$H = +0{,}659$
$B = -0{,}255$	$I = +1{,}050$
$C = -1{,}234$	$K = +0{,}577$
$D = +0{,}086$	$L = -1{,}351$
$E = -0{,}447$	$M = -0{,}109792$
$F = +1{,}351$	$N = +0{,}119681$
$G = +0{,}271$	

Denique errores maxime plausibiles prodeunt per formulas

$$(0) = C + 17{,}068\,M$$
$$(1) = A + C$$
$$(2) = C - 20{,}174\,M$$
$$(3) = D - 16{,}993\,M$$

etc., vnde obtinemus valores numericos sequentes; in gratiam comparationis apponimus (mutatis signis) correctiones a clar. de Krayenhof obseruationibus applicatas:

	de Kr.		de Kr.
(0) = − 3″108	− 2″090	(14) = + 0″795	+ 2″400
(1) = − 1,832	+ 0,116	(15) = + 0,061	+ 1,273
(2) = + 0,981	− 1,982	(16) = + 1,211	+ 5,945
(3) = + 1,952	+ 1,722	(17) = − 1,732	− 7,674
(4) = − 0,719	+ 2,848	(18) = + 1,265	+ 1,876
(5) = − 0,512	− 3,848	(19) = + 2,959	+ 6,251
(6) = + 3,648	− 0,137	(20) = − 1,628	− 5,530
(7) = − 3,221	+ 1,000	(21) = + 2,211	+ 3,486
(8) = − 1,180	− 1,614	(22) = + 0,322	− 3,454
(9) = − 1,116	0	(23) = − 2,489	0
(10) = + 2,376	+ 5,928	(24) = − 1,709	+ 0,400
(11) = + 1,096	− 3,570	(25) = + 2,701	+ 2,054
(12) = + 0,016	+ 2,414	(26) = − 1,606	− 3,077
(13) = − 2,013	− 6,014		

Aggregatum quadratorum nostrarum compensationum inuenitur = 97,8845. Hinc error medius, quatenus ex 27 angulis obseruatis colligi potest,

$$= \sqrt{\frac{97,8845}{13}} = 2''7440$$

Aggregatum quadratorum mutationum, quas clar. de Krayenhof ipse angulis obseruatis applicauit, inuenitur = 341,4201.

24.

Exemplum alterum suppeditabunt triangula inter quinque puncta triangulationis Hannoveranae, Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode, Wilsede. Obseruatae sunt directiones *):

*) Initia, ad quae singulae directiones referuntur, hic tamquam arbitraria considerantur, quamquam reuera cum lineis meridianis stationum coincidant. Obseruationes in posterum complete publici iuris

In statione Falkenberg

0.	Wilsede	187°	47′	30″311
1.	Wulfsode	225	9	39,676
2.	Hauselberg	266	13	56,239
3.	Breithorn	274	14	43,634

In statione Breithorn

4.	Falkenberg	94	33	40,755
5.	Hauselberg	122	51	23,054
6.	Wilsede	150	18	35,100

In statione Hauselberg

7.	Falkenberg	86	29	6,872
8.	Wilsede	154	37	9,624
9.	Wulfsode	189	2	56,376
10.	Breithorn	302	47	37,732

In statione Wulfsode

11.	Hauselberg	9	5	36,593
12.	Falkenberg	45	27	33,556
13.	Wilsede	118	44	13,159

In statione Wilsede

14.	Falkenberg	7	51	1,027
15.	Wulfsode	298	29	49,519
16.	Breithorn	330	3	7,392
17.	Hauselberg	334	25	26,746

Ex his obseruationibus septem triangula formare licet.

Triangulum I.

Falkenberg	8°	0′	47″395
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg	143	41	29,140

---

fient; interim figura inuenitur in Astronomische Nachrichten Vol. I. p. 441.

Triangulum II.	
Falkenberg	86° 27′ 13″,323
Breithorn	55 44 54,345
Wilsede	37 47 53,635
Triangulum III.	
Falkenberg	41 4 16,563
Hauselberg	102 33 49,504
Wulfsode	36 21 56,963
Triangulum IV.	
Falkenberg	78 26 25,928
Hauselberg	68 8 2,752
Wilsede	35 25 34,281
Triangulum V.	
Falkenberg	37 22 9,365
Wulfsode	73 16 39,603
Wilsede	69 21 11,508
Triangulum VI.	
Breithorn	27 27 12,046
Hauselberg	148 10 28,108
Wilsede	4 22 19,354
Triangulum VII.	
Hauselberg	34 25 46,752
Wulfsode	109 38 36,566
Wilsede	35 55 37,227

Aderunt itaque septem aequationes conditionales secundi generis (aequationes primi generis manifesto cessant), quas vt eruamus, computandi sunt ante omnia excessus sphaeroidici septem triangulorum. Ad hunc finem requiritur cognitio magnitudinis absolutae saltem vnius lateris: latus inter puncta Wilsede et Wulfsode est 22877,94 metrorum. Hinc prodeunt excessus sphaeroidici triangulorum I...0″202; II...2″442; III...1″257; IV....1″919; V....1″957; VI....0″321; VII....1″295.

Iam si directionis eo ordine, quo supra allatae indicibusque distinctae sunt, per $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. designantur, trianguli I anguli fiunt $v^{(3)} - v^{(2)}$, $v^{(5)} - v^{(4)}$, $360° + v^{(7)} - v^{(10)}$, adeoque aequatio conditionalis prima

$$- v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179° 59' 59''798 = 0$$

Perinde triangula reliqua sex alias suppeditant; sed leuis attentio docebit, has septem aequationes non esse independentes, sed secundam identicam cum summa primae, quartae et sextae; nec non summam tertiae et quintae identicam cum summa quartae et septimae: quapropter secundam et quintam negligemus. Loco remanentium aequationum conditionalium in forma finita, adscribimus aequationes correspondentes e complexu (13), dum pro characteribus ε, ε' etc. his (0), (1), (2) etc. vtimur:

$$\begin{aligned}
-1''368 &= -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10)\\
+1{,}773 &= -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12)\\
+1{,}042 &= -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17)\\
-0{,}813 &= -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17)\\
-0{,}750 &= -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)
\end{aligned}$$

Aequationes conditionales tertii generis *octo* e triangulorum systemate peti possent, quum tum terna quatuor triangulorum I, II, IV, VI, tum terna ex his III, IV, V, VII ad hunc finem combinare liceat; attamen leuis attentio docet, *duas* sufficere, alteram ex illis, alteram ex his, quum reliquae in his atque prioribus aequationibus conditionalibus iam contentae esse debeant. Aequatio itaque conditionalis sexta nobis erit

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(3)} - v^{(2)} - 0''067) - \log\sin(v^{(5)} - v^{(4)} - 0''067)\\
&+ \log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0''640) - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0''640)\\
&+ \log\sin(v^{(6)} - v^{(5)} - 0''107) - \log\sin(v^{(17)} - v^{(16)} - 0''107) = 0
\end{aligned}$$

atque septima

$$\begin{aligned}&\log\sin(\nu^{(2)}-\nu^{(1)}-0''419)-\log\sin(\nu^{(12)}-\nu^{(11)}-0''419)\\&+\log\sin(\nu^{(14)}-\nu^{(17)}-0''640)-\log\sin(\nu^{(2)}-\nu^{(0)}-0''640)\\&+\log\sin(\nu^{(13)}-\nu^{(11)}-0''432)-\log\sin(\nu^{(17)}-\nu^{(15)}-0''432)\\&=0\end{aligned}$$

quibus respondent aequationes complexus (13)

$$\begin{aligned}+25=&+4{,}31(0)-153{,}88(2)+149{,}57(3)+39{,}11(4)-79{,}64(5)\\&+40{,}53(6)+31{,}90(14)+275{,}39(16)-307{,}29(17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3=&+4{,}31(0)-24{,}16(1)+19{,}85(2)+36{,}11(11)-28{,}59(12)\\&-7{,}52(13)+31{,}90(14)+29{,}06(15)-60{,}96(17)\end{aligned}$$

Quodsi iam singulis directionibus eandem certitudinem tribuimus, statuendo $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$, correlataque septem aequationum conditionalium, eo ordine, quem hic sequuti sumus, per A, B, C, D, E, F, G denotamus, horum determinatio petenda erit ex aequationibus sequentibus:

$$\begin{aligned}-1{,}368&=+6A-2B-2C-2D+184{,}72F-19{,}85G\\+1{,}773&=-2A+6B+2C+2E-153{,}88F-20{,}69G\\+1{,}042&=-2A+2B+6C-2D-2E+181{,}00F+108{,}40G\\-0{,}813&=-2A-2C+6D+2E-462{,}51F-60{,}96G\\-0{,}750&=+2B-2C+2D+6E-307{,}29F-133{,}65G\\+25\quad&=+184{,}72A-153{,}88B+181{,}00C-462{,}51D\\&\quad-307{,}29E+224868F+16694{,}1G\\-3\quad&=-19{,}85A-20{,}69B+108{,}40C-60{,}96D\\&\quad-133{,}65E+16694{,}1F+8752{,}39G\end{aligned}$$

Hinc deducimus per eliminationem

$$\begin{aligned}A&=-0{,}225\\B&=+0{,}344\\C&=-0{,}088\\D&=-0{,}171\end{aligned}$$

$E = -0,323$
$F = +0,000215915$
$G = -0,00547462$

Iam errores maxime plausibiles habentur per formulas:

$(0) = -C + 4,31F + 4,31G$
$(1) = -B - 24,16G$
$(2) = -A + B + C - 153,88F + 19,85G$

etc., vnde prodeunt valores numerici

$(0) = +0''065$	$(9) = +0''021$
$(1) = -0,212$	$(10) = +0,054$
$(2) = +0,339$	$(11) = -0,219$
$(3) = -0,193$	$(12) = +0,501$
$(4) = +0,233$	$(13) = -0,282$
$(5) = -0,071$	$(14) = -0,256$
$(6) = -0,162$	$(15) = +0,164$
$(7) = -0,481$	$(16) = +0,230$
$(8) = +0,406$	$(17) = -0,139$

Summa quadratorum horum errorum inuenitur $= 1,2288$; hinc error medius vnius directionis, quatenus e 18 directionibus obseruatis erui potest,

$$= \sqrt{\frac{1,2288}{7}} = 0''4190$$

25.

Vt etiam pars altera theoriae nostrae exemplo illustretur, indagamus praecisionem, qua latus Falkenberg-Breithorn e latere Wilsede-Wulfsode adiumento obseruationum compensatarum determinatur. Functio u, per quam illud in hoc casu exprimitur, est

$$u = 22877^m 94 \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0''652) \cdot \sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0''814)}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0''652) \cdot \sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0''814)}$$

Huius valor, e valoribus correctis directionum $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$ etc. inuenitur

$$= 26766^{\mathrm{m}}\,68$$

Differentiatio autem illius expressionis suppeditat, si differentialia $\mathrm{d}\nu^{(0)}$, $\mathrm{d}\nu^{(1)}$ etc. minutis secundis expressa concipiuntur,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u = {} & 0^{\mathrm{m}}\,16991\,(\mathrm{d}\nu^{(0)} - \mathrm{d}\nu^{(1)}) + 0^{\mathrm{m}}\,08836\,(\mathrm{d}\nu^{(4)} - \mathrm{d}\nu^{(6)}) \\ & - 0^{\mathrm{m}}\,03899\,(\mathrm{d}\nu^{(12)} - \mathrm{d}\nu^{(13)}) + 0^{\mathrm{m}}\,16731\,(\mathrm{d}\nu^{(14)} - \mathrm{d}\nu^{(16)}) \end{aligned}$$

Hinc porro inuenitur

$$\begin{aligned} [al] &= -\ 0{,}08836 \\ [bl] &= +\ 0{,}13092 \\ [cl] &= -\ 0{,}00260 \\ [dl] &= +\ 0{,}07895 \\ [el] &= +\ 0{,}03899 \\ [fl] &= -\ 40{,}1315 \\ [gl] &= +\ 10{,}9957 \\ [ll] &= +\ 0{,}13238 \end{aligned}$$

Hinc denique per methodos supra traditas inuenitur, quatenus metrum pro vnitate dimensionum linearium accipimus,

$$\frac{1}{P} = 0{,}08329, \text{ siue } P = 12{,}006$$

vnde error medius in valore lateris Falkenberg-Breithorn metuendus $= 0{,}2886\,m$ metris, (vbi m error medius in directionibus obseruatis metuendus, et quidem in minutis secundis expressus), adeoque, si valorem ipsius m supra erutum adoptamus,

$$= 0^{\mathrm{m}}\,1209$$

Ceterum inspectio systematis triangulorum sponte docet, punctum Hauselberg omnino ex illo elidi potuisse, incolumi manente nexu inter latera Wilsede-Wulfsode atque Falkenberg-Breithorn. Sed a bona methodo abhorreret, *supprimere* idcirco obseruationes, quae ad punctum Hauselberg referuntur *), quum certe ad praecisionem augendam conferre valeant. Vt clarius appareret, quantum praecisionis augmentum inde redundet, calculum denuo fecimus excludendo omnia, quae ad punctum Hauselberg referuntur, quo pacto e 18 directionibus supra traditis octo excidunt, atque reliquarum errores maxime plausibilis ita inueniuntur:

$(0) = +\ 0''327$	$(12) = +\ 0''206$
$(1) = -\ 0{,}206$	$(13) = -\ 0{,}206$
$(3) = -\ 0{,}121$	$(14) = +\ 0{,}327$
$(4) = +\ 0{,}121$	$(15) = +\ 0{,}206$
$(6) = -\ 0{,}121$	$(16) = +\ 0{,}121$

Valor lateris Falkenberg-Breithorn tunc prodit $= 26766^m63$, parum quidem a valore supra eruto discrepans, sed calculus ponderis producit

$$\frac{1}{P} = 0{,}13082 \text{ siue } P = 7{,}644$$

adeoque error medius metuendus $= 0{,}36169\, m$ metris $= 0^m 1515$ Patet itaque, per accessionem obseruationum, quae ad punctum Hauselberg referuntur, pondus determinationis lateris Falkenberg-Breithorn auctum esse in ratione numeri 7,644 ad 12,006, siue vnitatis ad 1,571.

*) Maior pars harum obseruationum iam facta erat, antequam punctum Breithorn repertum, atque in systema receptum esset.

THEOREMATIS FUNDAMENTALIS

IN

DOCTRINA DE RESIDUIS QUADRATICIS DEMONSTRATIONES

ET

AMPLIATIONES NOVAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS,

ORDINIS GUELPHORUM ATQUE ORDINIS DANNEBROG EQUITE, BRITANNIARUM HANNOVERAEQUE REGI A CONSILIIS AULAE, OBSERVATORII REGII GOTTINGENSIS DIRECTORE, ASTRONOMIAE IN UNIVERSITATE GOTTINGENSI PROFESSORE, SOCIETATUM REGIARUM GOTTINGENSIS ET LONDINENSIS, ACADEMIAE BEROLINENSIS, SOCIETATIS ITALICAE ALIARUMQUE SODALI.

GOTTINGAE

APUD HENRICUM DIETERICH.

MDCCCXVIII.

Quadratic residues
II c)

4

THEOREMATIS FUNDAMENTALIS
IN
DOCTRINA DE RESIDUIS QUADRATICIS
DEMONSTRATIONES ET AMPLIATIONES
NOVAE

AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS
SOC. REG. SCIENT. TRADITAE 1817. FEBR. 10.

Theorema fundamentale de residuis quadraticis, quod inter pulcherrimas arithmeticae sublimioris veritates refertur, facile quidem per inductionem detectum, longe vero difficilius demonstratum est. Saepius in hoc genere accidere solet, ut veritatum simplicissimarum, quae scrutatori per inductionem sponte quasi se offerunt, demonstrationes profundissime lateant, et post multa demum tentamina irrita, longe forte alia quam qua quaesitae erant via, tandem in lucem protrahi possint. Dein haud raro fit, quam primum una inventa est via, ut *plures* subinde patefiant ad eandem metam perducentes, aliae brevius et magis directe, aliae quasi ex obliquo et a principiis longe diversis exorsae, inter quae et quaestionem propositam vix ullum vinculum suspicatus fuisses. Mirus hujusmodi nexus inter veritates abstrusiores non solum peculiarem quandam venustatem hisce contemplationibus conciliat, sed ideo quoque sedulo investigari atque enodari meretur, quod haud raro nova ipsius scientiae subsidia vel incrementa inde demanant.

A 2 Etsi

Etsi igitur theorema arithmeticum, de quo hic agetur, per curas anteriores, quae quatuor demonstrationes inter se prorsus diversas *) suppeditaverant, plene absolutum videri possit, tamen denuo ad idem argumentum revertor, duasque alias demonstrationes adjungo, quae novam certe lucem huic rei affundent. Prior quidem tertiae quodammodo affinis est, quod ab eodem lemmate proficiscitur; postea vero iter diversum prosequitur, ita ut merito pro demonstratione nova haberi possit, quae concinnitate ipsa illa tertia si non superior saltem haud inferior videbitur. Contra demonstratio sexta principio plane diverso subtiliori innixa est, novumque sistit exemplum mirandi nexus inter veritates arithmeticas primo aspectu longissime ab invicem remotas. Duabus hisce demonstrationibus adjungitur algorithmus novus persimplex ad dijudicandum, utrum numerus integer datus, numeri primi dati residuum quadraticum sit an non residuum.

Alia adhuc affuit ratio, quae ut novas demonstrationes, novem jam abhinc annos promissas, nunc potissimum promulgarem, effecit. Scilicet quum inde ab anno 1805 theoriam residuorum cubicorum atque biquadraticorum, argumentum longe difficilius, perscrutari coepissem, similem fere fortunam, ac olim in theoria residuorum quadraticorum, expertus sum. Protinus quidem theoremata ea, quae has quaestiones prorsus exhauriunt, et in quibus mira analogia cum theorematibus ad residua quadratica pertinentibus eminet, per inductionem detecta fuerunt, quamprimum via idonea quaesita essent: omnes vero conatus, ipsorum demonstrationibus ex omni parte perfectis potiundi, per longum tempus irriti manserunt. Hoc ipsum incitamentum erat, ut demonstrationibus

*) Duae expositae sunt in *Disquisitionum Arithmeticarum* Sect. quarta et quinta; tertia in commentatione peculiari (*Comment. Soc. Gotting. Vol. XVI*), quarta inserta est commentationi: *Summatio quarundam seriierum singularium* (*Commentt. Recentiores, Vol. I.*)

tionibus jam cognitis circa residua quadratica alias aliasque addere tantopere studerem, spe fultus, ut ex multis methodis diversis una vel altera ad illustrandum argumentum affine aliquid conferre posset. Quae spes neutiquam vana fuit, laboremque indefessum tandem successus prosperi sequuti sunt. Mox vigiliarum fructus in publicam lucem edere licebit: sed antequam arduum hoc opus aggrediar, semel adhuc ad theoriam residuorum quadraticorum reverti, omnia quae de eadem adhuc supersunt agenda absoluere, atque sic huic arithmeticae sublimioris parti quasi valedicere constitui.

Theorematis fundamentalis in theoria residuorum quadraticorum demonstratio quinta.

I.

In introductione jam declaravimus, demonstrationem quintam et tertiam ab eodem lemmate proficisci, quod commoditatis caussa, in signis disquisitioni praesenti adaptatis hoc loco repetere visum est.

Lemma. *Sit m numerus primus (positivus impar), M integer per m non divisibilis; capiantur residua minima positiva numerorum*

$$M,\ 2M,\ 3M,\ 4M\ \ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}(m-1)M$$

secundum modulum m, quae partim erunt minora quam $\frac{1}{2}m$, partim majora: posteriorum multitudo sit $= n$. Tunc erit M residuum quadraticum ipsius m, vel non residuum, prout n par est, vel impar.

Demonstr. Sint e residuis illis ea, quae minora sunt quam $\frac{1}{2}m$, haec a, b, c, d etc.; reliqua vero, majora quam $\frac{1}{2}m$, haec a', b', c', d' etc. Posteriorum complementa ad m, puta $m-a'$, $m-b'$, $m-c'$, $m-d'$ etc. manifesto cuncta minora erunt quam $\frac{1}{2}m$, atque tum inter se tum a residuis a, b, c, d etc. diversa,

quam-

quamobrem cum his fimul fumta, ordine quidem mutato, identica erunt cum omnibus numeris 1, 2, 3, 4 .... $\frac{1}{2}(m-1)$. Statuendo itaque productum

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(m-1) = P$$

erit

$$P = a\,b\,c\,d \ldots \times (m-a')\,(m-b')\,(m-c')\,(m-d') \ldots$$

adeoque

$$(-1)^n P = a\,b\,c\,d \ldots \times (a'-m)\,(b'-m)\,(c'-m)\,(d'-m) \ldots$$

Porro fit, fecundum modulum m,

$$PM^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv a\,b\,c\,d \ldots \times a'b'c'd' \ldots$$
$$\equiv a\,b\,c\,d \ldots \times (a'-m)\,(b'-m)(c'-m)\,(d'-m) \ldots$$

adeoque

$$PM^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv P(-1)^n$$

Hinc $M^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv \pm 1$, accepto figno fuperiori vel inferiori, prout n par eft vel impar, unde adjumento theorematis in *Disquifitionibus Arithmeticis* art. 106 demonftrati lemmatis veritas fponte demanat.

2.

Theorema. *Sint m, M integri pofitivi impares inter fe primi, n multitudo eorum e refiduis minimis pofitivis numerorum M, $2M$, $3M$ ..... $\frac{1}{2}(m-1)M$ fecundum modulum m, quae funt majora quam $\frac{1}{2}m$; ac perinde N multitudo eorum e refiduis minimis pofitivis numerorum m, $2m$, $3m$ ..... $\frac{1}{2}(M-1)m$ fecundum modulum M, quae funt majora quam $\frac{1}{2}M$. Tunc tres numeri n, N, $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ vel omnes fimul pares erunt, vel unus par duoque reliqui impares.*

Demonstr. Defignemus

per f complexum numerorum 1, 2, 3 ..... $\frac{1}{2}(m-1)$
per f' complexum numerorum $m-1$, $m-2$, $m-3$ ..... $\frac{1}{2}(m+1)$
per F complexum numerorum 1, 2, 3 ..... $\frac{1}{2}(M-1)$

per

per F' complexum numerorum $M-1, M-2, M-3 \ldots\ldots \frac{1}{2}(M+1)$. Indicabit itaque n, quot numeri Mf residua sua minima positiva secundum modulum m habeant in complexu f', et perinde N indicabit, quot numeri mF habeant residua sua minima positiva secundum modulum M in complexu F'. Denique designet

φ complexum numerorum $1, 2, 3 \ldots\ldots \frac{1}{2}(mM-1)$

φ' complexum numerorum $mM-1, mM-2, mM-3 \ldots\ldots \frac{1}{2}(mM+1)$

Quum quilibet integer per m non divisibilis secundum modulum m vel alicui residuo ex f vel alicui ex f' congruus esse debeat, ac perinde quilibet integer per M non divisibilis secundum modulum M congruus sit vel alicui residuo ex F vel alicui ex F': omnes numeri φ, inter quos manifesto nullus per m et M simul divisibilis occurrit, in octo classes sequenti modo distribui possunt.

I. In prima classe erunt numeri secundum modulum m alicui numero ex f, secundum modulum M vero alicui numero ex F congrui. Designabimus multitudinem horum numerorum per α.

II. Numeri secundum modulos m, M resp. numeris ex f, F' congrui, quorum multitudinem statuemus $= \beta$.

III. Numeri secundum modulos m, M resp. numeris ex f', F congrui, quorum multitudinem statuemus $= \gamma$.

IV. Numeri secundum modulos m, M resp. numeris ex f', F' congrui, quorum multitudo sit $= \delta$.

V. Numeri per m divisibiles, secundum modulum M vero residuis ex F congrui.

VI. Numeri per m divisibiles, secundum modulum M vero residuis ex F' congrui.

VII. Numeri per M divisibiles, secundum modulum m autem residuis ex f congrui.

VIII. Numeri per M divisibiles, secundum modulum m vero residuis ex f' congrui.

Mani-

Manifesto classes V et VI simul sumtae complectentur omnes numeros mF, multitudo numerorum in VI contentorum erit $= N$, adeoque multitudo numerorum in V contentorum erit $\frac{1}{2}(M-1) - N$. Perinde classes VII et VIII simul sumtae continebunt omnes numeros Mf, in classe VIII reperientur n numeri, in classe VII autem $\frac{1}{2}(m-1) - n$.

Prorsus simili modo omnes numeri Φ' in octo classes IX — XVI distribuentur, in quo negotio si eundem ordinem servamus, facile perspicietur, numeros in classibus

IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI

contentos resp. esse complementa numerorum in classibus

IV, III, II, I, VI, V, VIII, VII

contentorum ad mM, ita ut in classe IX reperiantur δ numeri; in classe X, γ et sic porro. Jam patet, si omnes numeri primae classis associentur cum omnibus numeris classis nonae, haberi omnes numeros infra mM, qui secundum modulum m alicui numero ex f, secundum modulum M vero alicui numero ex F sunt congrui, quorumque multitudinem aequalem esse multitudini omnium combinationum singulorum f cum singulis F, facile perspicitur. Habemus itaque

$$\alpha + \delta = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

similique ratione etiam erit

$$\beta + \gamma = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

Junctis omnibus numeris classium II, IV, VI, manifesto habebimus omnes numeros infra $\frac{1}{2} mM$, qui alicui residuo ex F' secundum modulum M congrui sunt. Iidem vero numeri ita quoque exhiberi possunt:

$$F',\ M + F',\ 2M + F',\ 3M + F' \ldots \tfrac{1}{2}(m-1)M + F'$$

unde omnium multitudo erit $= \frac{1}{4}(m-1)(M-1)$, sive habebimus

$$\beta + \delta + N = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

Perinde e junctione omnium classium III, IV, VIII colligere licet

$\gamma + \delta$

$$\gamma + \delta + n = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

Ex his quatuor aequationibus oriuntur sequentes:

$$2\alpha = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1) + n + N$$
$$2\beta = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1) + n - N$$
$$2\gamma = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1) - n + N$$
$$2\delta = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1) - n - N$$

quarum quaelibet theorematis veritatem monstrat.

3.

Quodsi jam supponimus, m et M esse numeros primos, e combinatione theorematis praecedentis cum lemmate art. 1 theorema fundamentale protinus demanabit. Patet enim,

I. quoties uterque m, M, sive alteruter tantum, sit formae $4k+1$, numerum $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ fore parem, adeoque n et N vel simul pares vel simul impares, et proin vel utrumque m et M alterius residuum quadraticum, vel utrumque alterius non residuum quadraticum.

II. Quoties autem uterque m, M est formae $4k+3$, erit $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ impar, hinc unus numerorum n, N par, alter impar, et proin unus numerorum m, M alterius residuum quadraticum, alter alterius non residuum quadraticum. *Q. E. D.*

Theorematis fundamentalis in theoria residuorum quadraticorum demonstratio sexta.

I.

Theorema. *Designante p numerum primum (positivum imparem), n integrum positivum per p non divisibilem, x quantitatem indeterminatam, functio* $1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} +$ etc. $+ x^{np-n}$ *divisibilis erit per* $1 + x + xx + x^3 +$ etc. $+ x^{p-1}$.

Demonstr. Accipiatur integer positivus g ita ut fiat $gn \equiv 1$ (mod. p), statuaturque $gn = 1 + hp$. Tunc erit

 $1+x^n$

$$\frac{1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.} + x^{np-n}}{1 + x + xx + x^3 + \text{etc.} + x^{p-1}} = \frac{(1 - x^{np})\,(1 - x)}{(1 - x^n)\,(1 - x^p)}$$

$$= \frac{(1 - x^{np})\,(1 - x^{gn} - x + x^{hp+1})}{(1 - x^n)\,(1 - x^p)}$$

$$= \frac{1 - x^{np}}{1 - x^p} \cdot \frac{1 - x^{gn}}{1 - x^n} - \frac{x(1 - x^{np})}{1 - x^n} \cdot \frac{1 - x^{hp}}{1 - x^p}$$

adeoque manifesto functio integra. *Q. E. D.*

Quaelibet itaque functio integra ipsius x per $\frac{1 - x^{np}}{1 - x^n}$ divisibilis, etiam divisibilis erit per $\frac{1 - x^p}{1 - x}$.

2.

Designet α radicem primitivam positivam pro modulo p, *i. e.* sit α integer positivus talis, ut residua minima positiva potestatum

$$1,\ \alpha,\ \alpha\alpha,\ \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{p-2}$$

secundum modulum p sine respectu ordinis cum numeris 1, 2, 3, 4 ..... $p - 1$ identici fiant. Designando porro per fx functionem

$$x + x^{\alpha} + x^{\alpha\alpha} + x^{\alpha^3} + \text{etc.} + x^{\alpha^{p-2}} + 1$$

patet, $fx - 1 - x - xx - x^3 - \text{etc.} - x^{p-1}$ divisibilem fore per $1 - x^p$, adeoque a potiori per $\frac{1 - x^p}{1 - x} = 1 + x + xx + x^3 + \text{etc.} + x^{p-1}$, per quam itaque functionem ipsa quoque fx divisibilis erit. Hinc vero sequitur, quum x exprimat quantitatem indeterminatam, esse quoque $f(x^n)$ divisibilem per $\frac{1 - x^{np}}{1 - x^n}$, et proin (art. praec.) etiam per $\frac{1 - x^p}{1 - x}$, quoties quidem n sit integer per p non divisibilis. Contra, quoties n est integer per p divisibilis, singulae partes functionis $f(x^n)$ unitate diminutae divisibiles erunt per $1 - x^p$; quamobrem in hoc casu etiam $f(x^n) - p$ per $1 - x^p$ et proin etiam per $\frac{1 - x^p}{1 - x}$ divisibilis erit.

3.

3.

Theorema. Statuendo

$$x - x^{\alpha} + x^{\alpha\alpha} - x^{\alpha^3} + x^{\alpha^4} - \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2}} = \xi$$

erit $\xi\xi \mp p$ divisibilis per $\frac{1-x^p}{1-x}$, accepto signo superiori, quoties p est formae $4k+1$, inferiori, quoties p est formae $4k+3$.

Demonstr. Facile perspicietur, ex $p-1$ functionibus hisce

$$+x\xi - xx + x^{\alpha+1} - x^{\alpha\alpha+1} + \text{etc.} + x^{\alpha^{p-2}+1}$$
$$-x^{\alpha}\xi - x^{2\alpha} + x^{\alpha\alpha+\alpha} - x^{\alpha^3+\alpha} + \text{etc.} + x^{\alpha^{p-1}+\alpha}$$
$$+x^{\alpha\alpha}\xi - x^{2\alpha\alpha} + x^{\alpha^3+\alpha\alpha} - x^{\alpha^4+\alpha\alpha} + \text{etc.} + x^{\alpha^p+\alpha\alpha}$$
$$-x^{\alpha^3}\xi - x^{2\alpha^3} + x^{\alpha^4+\alpha^3} - x^{\alpha^5+\alpha^3} + \text{etc.} + x^{\alpha^{p+1}+\alpha^3}$$

etc. usque ad

$$-x^{\alpha^{p-2}}\xi - x^{2\alpha^{p-2}} + x^{\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}} - x^{\alpha^p+\alpha^{p-2}} + \text{etc.} + x^{\alpha^{2p-4}+\alpha^{p-2}}$$

primam fieri $= 0$, singulas reliquas autem per $1-x^p$ divisibiles. Quare per $1-x^p$ etiam divisibilis erit omnium summa, quae colligitur =

$$\xi\xi - (f(xx)-1) + (f(x^{\alpha+1})-1) - (f(x^{\alpha\alpha+1})-1) + (f(x^{\alpha^3+1})-1) - \text{etc.} + (f(x^{\alpha^{p-2}})-1)$$
$$= \xi\xi - f(xx) + f(x^{\alpha+1}) - f(x^{\alpha\alpha+1}) + f(x^{\alpha^3+1}) - \text{etc.} + f(x^{\alpha^{p-2}}) = \Omega$$

Erit itaque haecce expressio Ω etiam divisibilis per $\frac{1-x^p}{1-x}$. Jam inter exponentes $2, \alpha+1, \alpha\alpha+1, \alpha^3+1 \ldots\ldots \alpha^{p-2}+1$ unicus tantum erit divisibilis per p, puta $\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$, unde per art. praec. singulae partes expressionis Ω hae

$$f(xx),\ f(x^{\alpha+1}),\ f(x^{\alpha\alpha+1}),\ (f x^{\alpha^3+1}) \text{ etc.},$$

excepto solo termino $f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})$, divisibiles erunt per $\frac{1-x^p}{1-x}$.

Istas itaque partes delere licebit, ita ut per $\frac{1-x^p}{1-x}$ etiam divisibilis maneat functio

$$\xi\xi \mp f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})$$

 ubi

ubi signum superius vel inferius valebit, prout p est formae $4k+1$ vel formae $4k+3$. Et quum insuper $f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1}) \mp p$ divisibilis sit per $\frac{1-x}{1-x}$, erit etiam $\xi\xi \mp p$ per $\frac{1-x^p}{1-x}$ divisibilis. *Q. E. D.*

Ne duplex signum ullam ambiguitatem adducere possit, per ε numerum $+1$ vel -1 denotabimus, prout p est formae $4k+1$ vel $4k+3$. Erit itaque $\frac{(1-x)(\xi\xi-\varepsilon p)}{1-x^p}$ functio integra ipsius x, quam per Z designabimus.

4.

Sit q numerus positivus impar, adeoque $\frac{1}{2}(q-1)$ integer. Erit itaque $(\xi\xi)^{\frac{1}{2}(q-1)} - (\varepsilon p)^{\frac{1}{2}(q-1)}$ divisibilis per $\xi\xi - \varepsilon p$, et proin etiam per $\frac{1-x^p}{1-x}$. Statuamus $\varepsilon^{\frac{1}{2}(q-1)} = \delta$, atque

$$\xi^{q-1} - \delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} = \frac{1-x^p}{1-x} \cdot Y$$

eritque Y functio integra ipsius x, atque $\delta = +1$, quoties unus numerorum p, q, sive etiam uterque, est formae $4k+1$; contra erit $\delta = -1$, quoties uterque p, q est formae $4k+3$.

5.

Jam supponamus, q quoque esse numerum primum (a p diversum) patetque, per theorema in *Disquisitionibus Arithmeticis* art. 51 demonstratum,

$$\xi^q - (x^q - x^{q\alpha} + x^{q\alpha\alpha} - x^{q\alpha^3} + \text{etc.} - x^{q\alpha^{p-2}})$$

divisibilem fieri per q, sive formae qX, ita ut X sit functio integra ipsius x etiam respectu coëfficientium numericorum (quod etiam de functionibus reliquis integris hic occurrentibus Z, Y, W subintelligendum est). Designemus pro modulo p atque radice primitiva α indicem numeri q per μ, i. e. sit $q \equiv \alpha^\mu$ (mod. p). Erunt itaque numeri q, $q\alpha$, $q\alpha\alpha$, $q\alpha^3$ ..... $q\alpha^{p-2}$ secundum modu-

modulum p resp. congrui numeris α^μ, $\alpha^{\mu+1}$, $\alpha^{\mu+2}$ .... α^{p-2}, 1, α, $\alpha\alpha$ ..... $\alpha^{\mu-1}$, adeoque

$$\begin{array}{l}
x^q - x^{\alpha^\mu} \\
x^{q\alpha} - x^{\alpha^{\mu+1}} \\
x^{q\alpha\alpha} - x^{\alpha^{\mu+2}} \\
x^{q\alpha^3} - x^{\alpha^{\mu+3}} \\
\vdots \\
x^{q\alpha^{p-\mu-2}} - x^{\alpha^{p-2}} \\
x^{q\alpha^{p-\mu-1}} - x \\
x^{q\alpha^{p-\mu}} - x^{\alpha} \\
x^{q\alpha^{p-\mu+1}} - x^{\alpha\alpha} \\
\vdots \\
x^{q\alpha^{p-2}} - x^{\alpha^{\mu-1}}
\end{array}$$

per $1-x^p$ divisibiles. Quibus quantitatibus, alternis vicibus positive et negative sumtis atque summatis, patet, per $1-x^p$ divisibilem esse functionem

$$x^q - x^{q\alpha} + x^{q\alpha\alpha} - x^{q\alpha^3} + \text{etc.} - x^{q\alpha^{p-2}} \mp \xi$$

valente signo superiori vel inferiori, prout μ par sit vel impar, i. e. prout q sit residuum quadraticum ipsius p vel non residuum. Statuemus itaque

$$x^q - x^{q\alpha} + x^{q\alpha\alpha} - x^{q\alpha^3} + \text{etc.} - x^{q\alpha^{p-2}} - \gamma\xi = (1-x^p)W$$

faciendo $\gamma = +1$, vel $\gamma = -1$, prout q est residuum quadraticum ipsius p vel non residuum, patetque, W fieri functionem integram.

6.

His ita praeparatis, e combinatione aequationum praecedentium deducimus

$q\xi X$

$$q\xi X = \varepsilon p(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) + \frac{1-x^p}{1-x}\cdot(Z(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) + Y\xi\xi - W\xi(1-x))$$

Supponamus, ex divisione functionis ξX per

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \text{etc.} + x + 1$$

oriri quotientem U cum residuo T, sive haberi

$$\xi X = \frac{1-x^p}{1-x}\cdot U + T$$

ita ut U, T sint functiones integrae, etiam respectu coëfficientium numericorum, et quidem T ordinis certe inferioris, quam divisor. Erit itaque

$$qT - \varepsilon p(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) = \frac{1-x^p}{1-x}\cdot(Z(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) + Y\xi\xi - W\xi(1-x) - qU)$$

quae aequatio manifesto subsistere nequit, nisi tum membrum a laeva tum membrum a dextra per se evanescat. Erit itaque $\varepsilon p\,(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma)$ per q divisibilis, nec non etiam $\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma$, adeoque etiam propter $\delta\delta = 1$, numerus $p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma\delta$ per q divisibilis erit.

Quodsi jam per ϵ designatur unitas positive vel negative accepta, prout p est residuum vel non residuum quadraticum numeri q, erit $p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \epsilon$ per q divisibilis, adeoque etiam $\epsilon - \gamma\delta$, quod fieri nequit, nisi fuerit $\epsilon = \gamma\delta$. Hinc vero theorema fundamentale sponte sequitur. Scilicet

I. Quoties vel uterque p, q, vel alteruter tantum est formae $4k+1$, adeoque $\delta = +1$, erit $\epsilon = \gamma$, et proin vel simul q residuum quadraticum ipsius p, atque p residuum quadraticum ipsius q; vel simul q non residuum ipsius p, atque p non residuum ipsius q.

II. Quoties uterque p, q est formae $4k+3$, adeoque $\delta = -1$, erit $\epsilon = -\gamma$, adeoque vel simul q residuum quadraticum ipsius p, atque p non residuum ipsius q; vel simul q non residuum ipsius p, atque p residuum ipsius q. *Q. E. D.*

Algo-

Algorithmus novus ad decidendum, utrum numerus integer positivus datus numeri primi positivi dati residuum quadraticum sit an non residuum.

I.

Antequam solutionem novam hujus problematis exponamus, solutionem in *Disquisitionibus Arithmeticis* traditam hic breviter repetemus, quae satis quidem expedite perficitur adjumento theorematis fundamentalis atque theorematum notorum sequentium:

I. Relatio numeri a ad numerum b (quatenus ille hujus residuum quadraticum est sive non residuum), eadem est quae numeri c ad b, si $a \equiv c$ (mod. b).

II. Si a est productum e factoribus α, β, γ, δ etc., atque b numerus primus, relatio ipsius a ad b ita a relatione horum factorum ad b pendebit, ut a fiat residuum quadraticum ipsius b vel non residuum, prout inter illos factores reperitur multitudo par vel impar talium, qui sint non residua ipsius b. Quoties itaque aliquis factor est quadratum, ad eum in hoc examine omnino non erit respiciendum; si quis vero factor est potestas integri cum exponente impari, illius vice ipse hic integer fungi poterit.

III. Numerus 2 est residuum quadraticum cujusvis numeri primi formae $8m+1$ vel $8m+7$, non residuum vero cujusvis numeri primi formae $8m+3$ vel $8m+5$.

Proposito itaque numero a, cujus relatio ad numerum primum b quaeritur: pro a, si major est quam b, ante omnia substituetur ejus residuum minimum positivum secundum modulum b, quo residuo in factores suos primos resoluto, quaestio per theorema II reducta est ad inventionem relationis singulorum horum factorum ad b. Relatio factoris 2, (siquidem adest vel semel, vel ter, vel quinquies etc.) innotescit per theorema III;

relatio

relatio reliquorum, per theorema fundamentale, pendet a relatione ipsius *b* ad singulos. Hoc itaque modo loco unius relationis numeri dati ad numerum primum *b* jam investigandae sunt aliquae relationes numeri *b* ad alios primos impares ipso *b* minores, quae problemata eodem modo ad minores modulos deprimentur, manifestoque hae depressiones successivae tandem exhaustae erunt.

2.

Ut exemplo haec solutio illustretur, quaerenda sit relatio numeri 103 ad 379. Quum 103 jam sit minor quam 379, atque ipse numerus primus, protinus applicandum erit theorema fundamentale, quod docet, relationem quaesitam oppositam esse relationi numeri 379 ad 103. Haec iterum aequalis est relationi numeri 70 ad 103, quae ipsa pendet a relationibus numerorum 2, 5, 7 ad 103. Prima harum relationum e theoremate III innotescit. Secunda per theorema fundamentale pendet a relatione numeri 103 ad 5, cui per theorema I aequalis est relatio numeri 3 ad 5; haec iterum per theorema fundamentale pendet a relatione numeri 5 ad 3, cui per theorema I aequalis est relatio numeri 2 ad 3, per theorema III nota. Perinde relatio numeri 7 ad 103 per theorema fundamentale a relatione numeri 103 ad 7 pendet, quae per theorema I aequalis est relationi numeri 5 ad 7; haec iterum per theorema fundamentale pendet a relatione numeri 7 ad 5, cui aequalis est per theorema I relatio numeri 2 ad 5 per theorema III nota. Quodsi jam hanc analysin in synthesin transmutare placet, quaestionis decisio ad quatuordecim momenta referetur, quae complete hic apponimus, ut major concinnitas solutionis novae eo clarius elucescat.

1. Numerus 2 est residuum quadraticum numeri 103 (theor. III).
2. Numerus 2 est non residuum quadraticum numeri 3 (theor. III).

3.

3. Numerus 5 est non residuum quadraticum numeri 3 (ex I et 2).
4. Numerus 3 est non residuum quadraticum numeri 5 (theor. fund. et 3).
5. Numerus 103 est non residuum quadraticum numeri 5 (I et 4).
6. Numerus 5 est non residuum quadraticum numeri 103 (theor. fund. et 6).
7. Numerus 2 est non residuum quadraticum numeri 5 (theor. III).
8. Numerus 7 est non residuum quadraticum numeri 5, (I et 7).
9. Numerus 5 est non residuum quadraticum numeri 7 (theor. fund. et 8).
10. Numerus 103 est non residuum quadraticum numeri 7, (I et 9).
11. Numerus 7 est residuum quadraticum numeri 103 (theor. fund. et 10).
12. Numerus 70 est non residuum quadraticum numeri 103, (II, 1, 6, 11).
13. Numerus 379 est non residuum quadraticum numeri 103, (I et 12).
14. Numerus 103 est residuum quadraticum numeri 379 (theor. fund. et 13).

* * *

In sequentibus brevitatis caussa utemur signo in *Comment. Gotting.* Vol. XVI. introducto. Scilicet per $[x]$ denotabimus quantitatem x ipsam, quoties x est integer, sive integrum proxime minorem quam x, quoties x est quantitas fracta, ita ut $x - [x]$ semper fiat quantitas non negativa unitate minor.

3.

Problema. Denotantibus a, b integros positivos inter se primos, et posito $[\frac{1}{2}a] = a'$, invenire aggregatum

$$\left[\frac{b}{a}\right] + \left[\frac{2b}{a}\right] + \left[\frac{3b}{a}\right] + \left[\frac{4b}{a}\right] + \text{etc.} + \left[\frac{a'b}{a}\right]$$

Sol. Defignemus brevitatis cauffa hujusmodi aggregatum per $\varphi\,(a, b)$, ita ut etiam fiat

$$\varphi\,(b, a) = [\tfrac{a}{b}] + [\tfrac{2a}{b}] + [\tfrac{3a}{b}] + \text{etc.} + [\tfrac{b'a}{b}]$$

fi ftatuimus $[\frac{1}{2}b] = b'$. In demonftratione tertia theorematis fundamentalis oftenfum eft, pro cafu eo ubi a et b funt impares, fieri

$$\varphi\,(a,b) + \varphi\,(b, a) = a'b'$$

facileque eandem methodum fequendo veritas hujus propofitionis ad eum quoque cafum extenditur, ubi alteruter numerorum a, b eft impar, uti illic jam addigitavimus. Dividatur, ad inftar methodi, per quam duorum integrorum divifor communis maximus inveftigatur, a per b, fitque β quotiens atque c refiduum; dein dividatur b per c et fic porro, ita ut habeantur aequationes

$$\begin{aligned} a &= \beta b + c\\ b &= \gamma c + d\\ c &= \delta d + e\\ d &= \varepsilon e + f \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hoc modo in ferie numerorum continuo decrescentium b, c, d, e, f etc. tandem ad unitatem perveniemus, quum per hyp. a et b fint inter fe primi, ita ut aequatio ultima fiat

$$k = \lambda l + 1.$$

Quum manifefto habeatur

$$[\tfrac{a}{b}] = [\beta + \tfrac{c}{b}] = \beta + [\tfrac{c}{b}]$$

$$[\tfrac{2a}{b}] = [2\beta + \tfrac{2c}{b}] = 2\beta + [\tfrac{2c}{b}]$$

$$[\tfrac{3a}{b}] = [3\beta + \tfrac{3c}{b}] = 3\beta + [\tfrac{3c}{b}]$$

etc., erit

$$\varphi\,(b, a) = \varphi\,(b, c) + \tfrac{1}{2}\beta\,(b'b' + b')$$

et proin

$$\varphi\,(a, b) = a'b' - \tfrac{1}{2}\beta\,(b'b' + b') - \varphi\,(b, c)$$

Per fimilia ratiocinia fit, fi ftatuimus $[\frac{1}{2}c] = c'$, $[\frac{1}{2}d] = d'$, $[\frac{1}{2}e] = e'$ etc.,

$$\begin{aligned} \varphi\,(b, c) &= b'c' - \tfrac{1}{2}\gamma\,(c'c' + c') - \varphi\,(c, d)\\ \varphi\,(c, d) &= c'd' - \tfrac{1}{2}\delta\,(d'd' + d') - \varphi\,(d, e)\\ \varphi\,(d, e) &= d'e' - \tfrac{1}{2}\varepsilon\,(e'e' + e') - \varphi\,(e, f) \end{aligned}$$

etc. usque ad

$$\varphi\,(k, l) = k'l' - \tfrac{1}{2}\lambda\,(l'l' + l') - \varphi\,(l, 1)$$

Hinc,

Hinc, quoniam manifeſto eſt $\varphi(l, 1) = 0$, colligimus formulam

$$\begin{aligned}\varphi(a, b) = {} & a'b' - b'c' + c'd' - d'e' + \text{etc.} \pm k'l' \\ & - \tfrac{1}{2}\beta(b'b' + b') + \tfrac{1}{2}\gamma(c'c' + c') - \tfrac{1}{2}\delta(d'd' + d') + \tfrac{1}{2}\varepsilon(e'e' + e') \\ & - \text{etc.} \mp \lambda(l'l' + l')\end{aligned}$$

4.

Facile jam ex iis, quae in demonſtratione tertia expoſita ſunt, colligitur, relationem numeri b ad a, quoties a ſit numerus primus, ſponte cognosci e valore aggregati $\varphi(a, 2b)$. Scilicet prout hoc aggregatum eſt numerus par vel impar, erit b reſiduum quadraticum ipſius a vel non reſiduum. Ad eundem vero finem ipſum quoque aggregatum $\varphi(a, b)$ adhiberi poterit, ea tamen reſtrictione, ut caſus ubi b impar eſt ab eo ubi par eſt diſtinguatur. Scilicet

I. Quoties b eſt impar, erit b reſiduum vel non reſiduum quadraticum ipſius a, prout $\varphi(a, b)$ par eſt vel impar.

II. Quoties b eſt par, eadem regula valebit, ſi inſuper a eſt vel formae $8n + 1$ vel formae $8n + 7$; ſi vero pro valore pari ipſius b modulus a eſt vel formae $8n + 3$ vel formae $8n + 5$, regula oppoſita applicanda erit, puta, b erit reſiduum quadraticum ipſius a, ſi $\varphi(a, b)$ eſt impar, non reſiduum vero, ſi $\varphi(a, b)$ eſt par.

Haec omnia ex art. 3 demonſtrationis tertiae facillime derivantur.

5.

Exemplum. Si quaeritur relatio numeri 103 ad numerum primum 379, habemus, ad eruendum aggregatum $\varphi(379, 103)$,

$$\begin{array}{r|r|l} a = 379 & a' = 189 & \\ b = 103 & b' = 51 & \beta = 3 \\ c = 70 & c' = 35 & \gamma = 1 \\ d = 33 & d' = 16 & \delta = 2 \\ e = 4 & e' = 2 & \varepsilon = 8 \end{array}$$

hinc $\varphi(379, 103) = 9639 - 1785 + 560 - 32$
$\qquad - 3978 + 630 - 272 + 24$
$\qquad = 4786$, unde 103 erit reſiduum quadraticum numeri 379. Si ad eundem finem aggregatum (379, 206) adhibere malumus, habemus hocce paradigma:

379	189	
206	103	1
173	86	1
33	16	5
8	4	4

unde deducimus

$$\begin{aligned}\varphi\,(379,\,206) &= 19467 - 8858 + 1376 - 64\\ &- 5356 + 3741 - 680 + 40\\ &= 9666,\end{aligned}$$

quapropter 103 eſt reſiduum quadraticum numeri 379.

6.

Quum ad decidendam relationem numeri b ad a non opus ſit, ſingulas partes aggregati $\varphi\,(a, b)$ computare, ſed ſufficiat noviſſe, quot inter eas ſint impares, regula noſtra ita quoque exhiberi poteſt:

Fiat ut ſupra $a = \beta b + c$, $b = \gamma c + d$, $c = \delta d + e$ etc., donec in ſerie numerorum a, b, c, d, e etc. ad unitatem perventum ſit. Statuatur $[\frac{1}{2}a] = a'$, $[\frac{1}{2}b] = b'$, $[\frac{1}{2}c] = c'$ etc., ſitque μ multitudo numerorum imparium in ſerie a', b', c' etc. eorum quos immediate ſequitur impar; ſit porro ν multitudo numerorum imparium in ſerie β, γ, δ etc. eorum, quibus in ſerie b', c', d' etc. reſp. reſpondet numerus formae $4n + 1$ vel formae $4n + 2$. His ita factis, erit b reſiduum quadraticum vel non reſiduum ipſius a, prout $\mu + \nu$ eſt par vel impar, unico caſu excepto, ubi ſimul eſt b par atque a vel formae $8n + 3$ vel $8n + 5$, pro quo regula oppoſita valet.

In exemplo noſtro ſeries a', b', c', d', e' duas ſucceſſiones imparium ſiſtit, unde $\mu = 2$; in ſerie β', γ', δ', ε', duo quidem impares adſunt, ſed quibus in ſerie b', c', d', e' reſpondent numeri formae $4n + 3$, unde $\nu = 0$. Fit itaque $\mu + \nu$ par, adeoque 103 reſiduum quadraticum numeri 379.

A.. preceding. 4(a)

THEORIA
RESIDUORUM BIQUADRATICORUM

COMMENTATIO PRIMA

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

GOTTINGAE

TYPIS DIETERICHIANIS.

MDCCCXXVIII.

THEORIA
RESIDUORUM BIQUADRATICORUM

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS.

COMMENTATIO PRIMA

SOCIETATI REGIAE TRADITA 1825, APR. 5.

1.

Theoria residuorum quadraticorum ad pauca theoremata fundamentalia reducitur, pulcherrimis Arithmeticae Sublimioris cimeliis adnumeranda, quae primo per inductionem facile detecta, ac dein multifariis modis ita demonstrata esse constat, vt nihil amplius desiderandum relictum sit.

Longe vero altioris indaginis est theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum. Quam quum inde ab anno 1805 perscrutari coepissemus, praeter ea, quae quasi in limine sunt posita, nonnulla quidem theoremata specialia se obtulerunt, tum propter simplicitatem suam, tum propter demonstrationum difficultatem valde insignia: mox vero comperimus, principia Arithmeticae hactenus vsitata ad theoriam generalem stabiliendam neutiquam sufficere, quin potius hanc necessario postulare, vt campus Arithmeticae Sublimioris infinities quasi promoueatur, quod quomodo intelligendum sit, in continuatione harum disquisitionum clarissime elucebit. Quamprimum hunc campum nouum ingressi sumus, aditus ad cognitionem theorematum simplicissimorum totam theoriam exhaurientium per inductionem statim patuit: sed ipsorum demonstrationes tam profunde latuerunt, vt post multa demum tentamina irrita tandem in lucem protrahi potuerint.

Quum iam ad promulgationem harum lucubrationum accingamur, a theoria residuorum biquadraticorum initium faciemus, et quidem in hac prima commentatione disquisitiones eas explicabimus, quas iam cis campum Arithmeticae ampliatum absoluere licuit, quae illuc viam quasi sternunt, simulque theoriae diuisionis circuli quaedam noua incrementa adiungunt.

2.

Notionem residui biquadratici in *Disquisitionibus Arithmeticis* p. 113 introduximus: scilicet numerus integer a, positiuus seu negatiuus, integri p residuum biquadraticum vocatur, si a secundum modulum p biquadrato congruus fieri potest, et perinde nonresiduum biquadraticum, si talis congruentia non exstat. In omnibus disquisitionibus sequentibus, vbi contrarium expressis verbis non monetur, modulum p esse numerum primum (imparem positiuum) supponemus, atque a per p non diuisibilem, quum omnes casus reliqui ad hunc facillime reduci possint.

3.

Manifestum est, omne residuum biquadraticum numeri p eiusdem quoque residuum quadraticum esse, et proin omne non-residuum quadraticum etiam non-residuum biquadraticum. Hanc propositionem etiam conuertere licet, quoties p est numerus primus formae $4n+3$. Nam si in hoc casu a est residuum quadraticum ipsius p, statuamus $a \equiv bb$ (mod. p), vbi b vel residuum quadraticum ipsius p erit vel non-residuum: in casu priori statuemus $b \equiv cc$, vnde $a \equiv c^4$, i. e. a erit residuum biquadraticum ipsius p; in casu posteriori $-b$ fiet residuum quadraticum ipsius p (quoniam -1 est non-residuum cuiusuis numeri primi formae $4n + 3$), faciendoque $-b \equiv cc$, erit vt antea $a \equiv c^4$, atque a residuum biquadraticum ipsius p. Simul facile perspicietur, alias solutiones congruentiae $x^4 \equiv a$ (mod. p), praeter has duas $x \equiv c$ et $x \equiv -c$ in hoc casu non dari. Quum hae propositiones obviae integram residuorum biquadraticorum theoriam pro modulis primis formae $4n + 3$ exhauriant, tales modulos a disquisitione nostra omnino excludemus, siue hanc ad modulos primos formae $4n + 1$ limitabimus.

4.

Existente itaque p numero primo formae $4n + 1$, propositionem art. praec. conuertere non licet: nempe exstare possunt residua quadratica, quae non sunt simul residua biquadratica, quod euenit, quoties residuum quadraticum congruum est quadrato non-residui quadratici. Statuendo enim $a \equiv bb$, existente b non-residuo quadratico ipsius p, si congruentiae $x^4 \equiv a$ satisfieri posset, per valorem $x \equiv c$, foret $c^4 \equiv bb$, siue productum $(cc - b)(cc + b)$ per p diuisibile, vnde p vel factorem $cc - b$ vel alterum $cc + b$ metiri deberet, i. e. vel $+b$ vel $-b$ foret residuum quadraticum ipsius p, et proin vterque (quoniam -1 est residuum quadraticum), contra hyp.

Omnes itaque numeri integri per p non diuisibiles in tres classes distribui possent, quarum prima contineat residua biquadratica, secunda non-residua biquadratica ea, quae simul sunt residua quadratica, tertia non-residua quadratica. Manifesto sufficit, tali classificationi solos numeros $1, 2, 3 \ldots\ldots p - 1$ subiicere, quorum semissis ad classem tertiam reduceretur, dum altera semissis inter classem primam et secundam distribueretur.

5.

Sed praestabit, quatuor classes stabilire, quarum indoles ita se habeat.

Sit A complexus omnium residuorum biquadraticorum ipsius p, inter 1 et $p-1$ (inclus.) sitorum, atque e non-residuum quadraticum ipsius p ad arbitrium electum. Sit porro B complexus residuorum minimorum positiuorum e productis eA secundum modulum p oriundorum, et perinde C, D resp. complexus residuorum minimorum positiuorum e productis eeA, e^3A secundum modulum p prodeuntium. His ita factis facile perspicitur, singulos numeros B inter se diuersos fore, et perinde singulos C, nec non singulos D; cifram autem inter omnes hos numeros occurrere non posse. Porro patet, omnes numeros, in A et C contentos, esse residua quadratica ipsius p, omnes autem in B et D non-residua quadratica, ita vt certe complexus A, C nullum numerum cum complexu B vel D communem habere possint. Sed etiam neque A cum C, neque B cum D vllum numerum communem habere potest. Supponamus enim

I. numerum aliquem ex A, e. g. a etiam in C inueniri, vbi prodierit e producto eea' ipsi congruo, existente a' numero e complexu A. Statuatur $a \equiv \alpha^4$, $a' \equiv \alpha'^4$, accipiaturque integer Θ ita, vt fiat $\Theta\alpha' \equiv 1$. His ita factis erit

$$ee\alpha'^4 \equiv \alpha^4, \text{ adeoque multiplicando per } \Theta^4,$$

$$ee \equiv \alpha^4\Theta^4$$

i. e. ee residuum biquadraticum, adeoque e residuum quadraticum, contra hyp.

II. Perinde supponendo, aliquem numerum complexibus B, D communem esse, atque e productis ea, e^3a' prodiisse, existentibus a, a' numeris e complexu A, e congruentia $ea \equiv e^3a'$ sequeretur $a \equiv eea'$, adeoque haberetur numerus, qui e producto eea' oriundus ad C simulque ad A pertineret, quod impossibile esse modo demonstrauimus.

Porro facile demonstratur, *omnia* residua quadratica ipsius p, inter 1 et $p-1$ incl. sita, necessario vel in A vel in C, omniaque non-residua quadratica ipsius p inter illos limites necessario vel in B vel in D occurrere debere. Nam

I. Omne tale residuum quadraticum, quod simul est residuum biquadraticum, per hyp. in A inuenitur.

II. Residuum quadraticum h, (ipso p minus), quod simul est non residuum biquadraticum, statuatur $\equiv gg$, vbi g erit non-residuum quadraticum. Accipiatur integer γ talis, vt fiat $e\gamma \equiv g$, eritque γ residuum quadraticum ipsius p, quod statuemus $\equiv kk$. Hinc erit

$$h \equiv gg \equiv ee\gamma\gamma \equiv eek^4$$

Quare quum residuum minimum ipsius k^4 inueniatur in A, numerus h, quippe qui ex illius producto per ee oritur, necessario in C contentus erit.

III. Designante h non-residuum quadraticum ipsius p inter limites 1 et $p-1$, eruatur inter eosdem limites numerus integer g talis, vt habeatur $eg \equiv h$. Erit itaque g residuum quadraticum, et proin vel in A vel in C contentus: in casu priori h manifesto inter numeros B, in posteriori autem inter numeros D inuenietur.

Ex his omnibus colligitur, cunctos numeros $1, 2, 3 \ldots. p-1$ inter quatuor series A, B, C, D ita distribui, vt quiuis illorum in vna harum reperiatur, vnde singulae series $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros continere debent. In hac classificatione classes A et C quidem numeros suos essentialiter possident, sed distinctio inter classes B et D eatenus arbitraria est, quatenus ab electione numeri e pendet, qui ipse semper ad B referendus est; quapropter si eius loco alius e classe D adoptatur, classes B, D inter se permutabuntur.

6.

Quum -1 sit residuum quadraticum ipsius p, statuamus, $-1 \equiv ff$ (mod. p), vnde quatuor radices congruentiae $x^4 \equiv 1$ erunt $1, f, -1, -f$. Quodsi itaque a est residuum biquadraticum ipsius p, puta $\equiv \alpha^4$, quatuor radices congruentiae $x^4 \equiv a$ erunt $\alpha, f\alpha, -\alpha, -f\alpha$, quas inter se incongruas esse facile perspicitur. Hinc patet, si colligantur residua minima positiua biquadratorum $1, 16, 81, 256 \ldots\ldots (p-1)^4$, quaterna semper aequalia fore, ita vt $\frac{1}{4}(p-1)$ residua biquadratica diuersa habeantur complexum A formantia. Si residua minima biquadratorum vsque ad $(\frac{1}{2}p-\frac{1}{2})^4$ tantum colliguntur, singula bis aderunt.

7.

Productum duorum residuorum biquadraticorum manifesto est residuum biquadraticum, siue e multiplicatione duorum numerorum classis A semper prodit productum, cuius residuum minimum positiuum ad eandem classem pertinet. Perinde producta numeri ex B in numerum ex D, vel numeri ex C in numerum ex C, habebunt residua sua minima in A.

In B autem cadent residua productorum $A.B$ et $C.D$; in C residua productorum $A.C$, $B.B$ et $D.D$; denique in D residua productorum $A.D$ et $B.C$.

Demonstrationes tam obuiae sunt, vt sufficiat, vnam indicavisse. Sint e. g. c et d numeri ex C et D, atque $c \equiv eea$, $d \equiv e^3 a'$, denotantibus a, a' numeros ex A. Tunc $e^4 aa'$ erit residuum biquadraticum, i. e. ipsius residuum minimum ad A refertur: quare quum productum cd fiat $\equiv e.e^4 aa'$, illius residuum minimum in B contentum erit.

Simul facile iam diiudicari potest, ad quamnam classem referendum sit productum e pluribus factoribus. Scilicet tribuendo classi A, B, C, D resp. characterem $0, 1, 2, 3$, character producti vel aggregato characterum singulorum factorum aequalis erit, vel eius residuo minimo secundum modulum 4.

8.

Operae pretium visum est, hasce propositiones elementares absque adminiculo theoriae residuorum potestatum euoluere, qua in auxilium vocata omnia adhuc multo facilius demonstrare licet.

Sit g radix primitiua pro modulo p, i. e. numerus talis, vt in serie potestatum g, gg, g^3 ... nulla ante hanc g^{p-1} vnitati secundum modulum p congrua euadat. Tunc residua minima positiua numerorum $1, g, gg, g^3 \ldots . g^{p-2}$ praeter ordinem cum his $1, 2, 3 \ldots . p-1$ conuenient, et in quatuor classes sequenti modo distribuentur:

ad	residua minima numerorum
A	$1, g^4, g^8, g^{12} \ldots . . g^{p-5}$
B	$g, g^5, g^9, g^{13} \ldots . . g^{p-4}$
C	$gg, g^6, g^{10}, g^{14} \ldots . . g^{p-3}$
D	$g^3, g^7, g^{11}, g^{15} \ldots . . g^{p-2}$

Hinc omnes propositiones praecedentes sponte demanant.

Ceterum sicuti hic numeri $1, 2, 3 \ldots . p-1$ in quatuor classes distributi sunt, quarum complexus per A, B, C, D designamus, ita *quemuis* integrum per p non diuisibilem, ad normam ipsius residui minimi secundum modulum p, alicui harum classium adnumerare licebit.

9.

Denotabimus per f residuum minimum potestatis $g^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum modulum p, vnde quum fiat $ff \equiv g^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1$ (*Disquiss. Arithm.* p. 59), patet, characterem f hic idem significare, quod in art. 6. Potestas $g^{\frac{1}{4}\lambda(p-1)}$ itaque, denotante λ integrum positiuum, congrua erit secundum modulum p numero $1, f, -1, -f$, prout λ formae $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ resp., siue prout residuum minimum ipsius g^λ in A, B, C, D resp. reperitur. Hinc nanciscimur criterium persimplex ad diiudicandum, ad quam classem numerus datus h per p non diuisibilis referendus sit; pertinebit scilicet h ad A, B, C vel D, prout potestas $h^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum modulum p numero 1, f, -1 vel $-f$ congrua euadit.

Tamquam corollarium hinc sequitur, -1 semper ad classem A referri, quoties p sit formae $8n+1$, ad classem C vero, quoties p sit formae $8n+5$. Demonstratio huius theorematis a theoria residuorum potestatum independens ex iis, quae in *Disquisitionibus Arithmeticis* p. 114 docuimus, facile adornari potest.

10.

Quum *omnes* radices primitiuae pro modulo p prodeant e residuis potestatum g^λ, accipiendo pro λ omnes numeros ad $p-1$ primos, facile perspicitur, illas inter complexus B et D aequaliter dispertitas fore, basi g semper in B contenta. Quodsi loco numeri g radix alia primitiua e complexu B pro basi accipitur, classificatio eadem manebit; si vero radix primitiua e complexu D tamquam basis adoptatur, classes B et D inter se permutabuntur.

Si classificatio criterio in art. praec. prolato superstruitur, discrimen inter classes B et D inde pendebit, vtram radicem congruentiae $xx \equiv -1$ (mod. p) pro numero characteristico f adoptemus.

11.

Quo facilius disquisitiones subtiliores, quas iam aggressuri sumus, per exempla illustrari possint, constructionem classium pro omnibus modulis infra 100 hic apponimus. Radicem primitiuam pro singulis minimam adoptauimus.

$p = 5$

$g = 2,\ f = 2$

A	1
B	2
C	3
D	4

$p = 13$

$g = 2,\ f = 8$

A	1, 3, 9
B	2, 5, 6
C	4, 10, 12
D	7, 8, 11

$p = 17$

$g = 3,\ f = 13$

A	1, 4, 13, 16
B	3, 5, 12, 14
C	2, 8, 9, 15
D	6, 7, 10, 11

$p = 29$

$g = 2,\ f = 12$

A	1, 7, 16, 20, 23, 24, 25
B	2, 3, 11, 14, 17, 19, 21
C	4, 5, 6, 9, 13, 22, 28
D	8, 10, 12, 15, 18, 26, 27

$p = 37$

$g = 2,\ f = 31$

A	1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34
B	2, 14, 15, 18, 20, 24, 29, 31, 32
C	3, 4, 11, 21, 25, 27, 28, 30, 36
D	5, 6, 8, 13, 17, 19, 22, 23, 35

$p = 41$

$g = 6,\ f = 32$

A	1, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40
B	6, 14, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 35
C	2, 5, 8, 9, 20, 21, 32, 33, 36, 39
D	3, 7, 11, 12, 13, 28, 29, 30, 34, 38

$p = 53$

$g = 2,\ f = 30$

A	1, 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49
B	2, 3, 19, 20, 26, 30, 31, 32, 35, 39, 41, 45, 48
C	4, 6, 7, 9, 11, 17, 25, 29, 37, 38, 40, 43, 52
D	5, 8, 12, 14, 18, 21, 22, 23, 27, 33, 34, 50, 51

$p = 61$

$g = 2,\ f = 11$

A	1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58
B	2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55
C	3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60
D	6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59

$p = 73$

$g = 5,\ f = 27$

A	1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72
B	5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68
C	3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70
D	11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62

$p = 89$

$g = 3,\ f = 34$

A	1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 25, 32, 39, 44, 45, 50, 57, 64, 67 73, 78, 81, 85, 87, 88
B	3, 6, 7, 12, 14, 23, 24, 28, 33, 41, 43, 46, 48, 56, 61, 65, 66, 75, 77, 82, 83, 86
C	5, 9, 10, 17, 18, 20, 21, 34, 36, 40, 42, 47, 49, 53, 55, 68, 69, 71, 72, 79, 80, 84
D	13, 15, 19, 26, 27, 29, 30, 31, 35, 37, 38, 51, 52, 54, 58, 59, 60, 62, 63, 70, 74, 76

$p = 97$

$g = 5,\ f = 22$

A	1, 4, 6, 9, 16, 22, 24, 33, 35, 36, 43, 47, 50, 54, 61, 62, 64, 73, 75, 81, 88, 91, 93, 96
B	5, 13, 14, 17, 19, 20, 21, 23, 29, 30, 41, 45, 52, 56, 67, 68, 74, 76, 77, 78, 80, 83, 84, 92
C	2, 3, 8, 11, 12, 18, 25, 27, 31, 32, 44, 48, 49, 53, 65, 66, 70, 72, 79, 85, 86, 89, 94, 95
D	7, 10, 15, 26, 28, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 46, 51, 55, 57, 58, 59, 60, 63, 69, 71, 82, 87, 90

12.

Quum numerus 2 sit residuum quadraticum omnium numerorum primorum formae $8n+1$, non residuum vero omnium formae $8n+5$, pro modulis primis formae prioris 2 in classe A vel C, pro modulis formae posterioris in classe B vel D inuenietur. Quum discrimen inter classes B et D non sit essentiale, quippe quod tantummodo ab electione numeri f pendet, modulos formae $8n+5$ aliquantisper seponemus. Modulos formae $8n+1$ autem *inductioni* subiiciendo, inuenimus 2 pertinere ad A pro $p = 73$, 89, 113, 233, 257, 281, 337, 353 etc.; contra 2 pertinere ad C pro $p = 17$, 41, 97, 137, 193, 241, 313, 401, 409, 433, 449, 457 etc.

Ceterum quum pro modulo primo formae $8n+1$ numerus -1 sit residuum biquadraticum, patet, -2 semper cum $+2$ ad eandem classem referendum esse.

13.

Si exempla art. praec. inter se comparantur, primo saltem aspectu criterium nullum simplex se offerre videtur, per quod modulos priores a posterioribus dignoscere liceret. Nihilominus *duo* huiusmodi criteria dantur, elegantia et simplicitate perinsignia, ad quorum alterum considerationes sequentes viam sternent.

Modulus p, tamquam numerus primus formae $8n+1$, reduci poterit, et quidem vnico tantum modo, sub formam $aa+2bb$ (*Disquiss. Arithm.* p. 220); radices a, b positiue accipi supponemus. Manifesto a impar erit, b vero par; statuemus autem $b=2^\lambda c$, ita vt c sit impar. Iam obseruamus

I. quum habeatur $p\equiv aa$ (mod. c) ipsum p esse residuum quadraticum ipsius c, et proin etiam singulorum factorum primorum, in quos c resoluitur: vicissim itaque, per theorema fundamentale, singuli hi factores primi erunt residua quadratica ipsius p, et proin etiam illorum productum c erit residuum quadraticum ipsius p. Quod quum etiam de numero 2 valeat, patet, b esse residuum quadraticum ipsius p, et proin bb, nec non $-bb$, residuum biquadraticum.

II. Hinc $-2bb$ ad eandem classem referri debet, in qua inuenitur numerus 2; quare quum $aa\equiv -2bb$, manifestum est, 2 vel in classe A, vel in classe C inueniri, prout a sit vel residuum quadraticum ipsius p, vel non-residuum qradraticum.

III. Iam supponamus, a in factores suos primos resolutum esse, e quibus ii, qui sunt vel formae $8m+1$ vel $8m+7$, denotentur per α, α', α'' etc., ii vero, qui sunt vel formae $8m+3$ vel $8m+5$, per β, β', β'' etc.: posteriorum multitudo sit $=\mu$. Quoniam $p\equiv 2bb$ (mod. a), erit p residuum quadraticum eorum factorum primorum ipsius a, quorum residuum quadraticum est 2, i. e. factorum α, α', α'' etc.; non-residuum quadraticum vero factorum eorum, quorum non-residuum quadraticum est 2, i. e. factorum β, β', β'' etc. Quocirca, vice versa, per theorema fundamentale, singuli α, α', α'' etc. erunt residua quadratica ipsius p, singuli β, β', β'' etc. autem non-residua quadratica. Ex his itaque concluditur, productum a fore residuum quadraticum ipsius p, vel nonresiduum, prout μ par sit vel impar.

IV. Sed facile confirmatur, productum omnium α, α', α'' etc. fieri formae $8m+1$ vel $8m+7$, idemque valere de producto omnium β, β', β'' etc., si horum multitudo fuerit par, ita vt in hoc casu etiam productum a necessario fieri debeat formae $8m+1$ vel $8m+7$; contra productum omnium β, β', β'' etc., quoties ipsorum multitudo impar sit, fieri formae $8m+3$ vel $8m+5$, idemque adeo in hoc casu valere de producto a.

Ex his omnibus itaque colligitur theorema elegans:

Quoties a est formae $8m+1$ *vel* $8m+7$, *numerus* 2 *in complexu A contentus erit; quoties vero a est formae* $8m+3$ *vel* $8m+5$, *numerus* 2 *in complexu C inuenietur.*

Quod confirmatur per exempla in art. praec. enumerata; priores enim moduli ita discerpuntur: $73=1+2\cdot36$, $89=81+2\cdot4$, $113=81+2\cdot16$, $233=225+2\cdot4$, $257=225+2\cdot16$, $281=81+2\cdot100$, $337=49+2\cdot144$, $353=225+2\cdot64$; posteriores vero ita: $17=9+2\cdot4$, $41=9+2\cdot16$, $97=25+2\cdot36$, $137=9+2\cdot64$, $193=121+2\cdot36$, $241=169+2\cdot36$, $313=25+2\cdot144$, $401=9+2\cdot196$, $409=121+2\cdot144$, $433=361+2\cdot36$, $449=441+2\cdot4$, $457=169+2\cdot144$.

14.

Quum discerptio numeri p in quadratum simplex et duplex nexum tam insignem cum classificatione numeri 2 prodiderit, operae pretium esse videtur tentare, num discerptio in duo quadrata, cui numerum p aeque obnoxium esse constat, similem forte successum suppeditet. Ecce itaque discerptiones numerorum p, pro quibus 2 pertinet ad classem

A	C
$9+64$	$1+16$
$25+64$	$25+16$
$49+64$	$81+16$
$169+64$	$121+16$
$1+256$	$49+144$
$25+256$	$225+16$
$81+256$	$169+144$
$289+64$	$1+400$
	$9+400$
	$289+144$
	$49+400$
	$441+16$

Ante omnia obseruamus, duorum quadratorum, in quae p discerpitur, alterum impar esse debere, quod statuemus $= aa$, alterum par, quod statuemus $= bb$. Quoniam aa fit formae $8n+1$, patet, valoribus impariter paribus ipsius b respondere valores ipsius p formae $8n+5$, ab inductione nostra hic exclusos, quippe qui numerum 2 in classe B vel D haberent. Pro valoribus autem ipsius p, qui sunt formae $8n+1$, b esse debet pariter par, et si inductioni, quam schema allatum ob oculos sistit, fidem habere licet, numerus 2 ad classem A referendus erit pro omnibus modulis, pro quibus b est formae $8n$, ad classem C vero pro omnibus modulis, pro quibus b est formae $8n+4$. Sed hoc theorema longe altioris indaginis est, quam id, quod in art. praec. eruimus, demonstrationique plures disquisitiones praeliminares sunt praemittendae, ordinem, quo numeri complexuum A, B, C, D se inuicem sequuntur, spectantes.

15.

Designemus multitudinem numerorum e complexu A, quos immediate sequitur numerus e complexu A, B, C, D resp., per (00), (01), (02), (03); perinde multitudinem numerorum e complexu B, quos sequitur numerus e complexu A, B, C, D resp. per (10), (11), (12), (13); similiterque sint in complexu C resp. (20), (21), (22), (23) numeri, in complexu D vero (30), (31), (32), (33) numeri, quos sequitur numerus e complexu A, B, C, D. Proponimus nobis, has sedecim multitudines a priori determinare. Quo commodius lectores ratiocinia generalia cum exemplis comparare possint, valores numericos terminorum schematis (S)

(00), (01), (02), (03)
(10), (11), (12), (13)
(20), (21), (22), (23)
(30), (31), (32), (33)

pro singulis modulis, pro quibus classificationes in art. 11 tradidimus, hic adscribere visum est.

$p = 5$	$p = 37$	$p = 73$
0, 1, 0, 0	2, 1, 2, 4	5, 6, 4, 2
0, 0, 0, 1	2, 2, 4, 1	6, 2, 5, 5
0, 0, 0, 0	2, 2, 2, 2	4, 5, 4, 5
0, 0, 1, 0	2, 4, 1, 2	2, 5, 5, 6
$p = 13$	$p = 41$	$p = 89$
0, 1, 2, 0	0, 4, 3, 2	3, 8, 6, 4
1, 1, 0, 1	4, 2, 2, 2	8, 4, 5, 5
0, 1, 0, 1	3, 2, 3, 2	6, 5, 6, 5
1, 0, 1, 1	2, 2, 2, 4	4, 5, 5, 8
$p = 17$	$p = 53$	$p = 97$
0, 2, 1, 0	2, 3, 6, 2	2, 6, 7, 8
2, 0, 1, 1	4, 4, 2, 3	6, 8, 5, 5
1, 1, 1, 1	2, 4, 2, 4	7, 5, 7, 5
0, 1, 1, 2	4, 2, 3, 4	8, 5, 5, 6
$p = 29$	$p = 61$	
2, 3, 0, 2	4, 3, 2, 6	
1, 1, 2, 3	3, 3, 6, 3	
2, 1, 2, 1	4, 3, 4, 3	
1, 2, 3, 1	3, 6, 3, 3	

Quum moduli formae $8n+1$ et $8n+5$ diuerso modo se habeant, vtrosque seorsim tractare oportet: a prioribus initium faciemus.

16.

Character (00) indicat, quot modis diuersis aequationi $\alpha+1=\alpha'$ satisfieri possit, denotantibus α, α' indefinite numeros e complexu A. Quum pro modulo formae $8n+1$, qualem hic subintelligimus, α' et $p-\alpha'$ ad eundem complexum pertineant, concinnius dicemus, (00) exprimere multitudinem modorum diuersorum, aequationi $1+\alpha+\alpha'=p$, satisfaciendi: manifesto huius aequationis vice etiam congruentia $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ (mod. p) fungi potest.

Perinde (01) indicat multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$ (mod. p); (02) multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\gamma\equiv 0$; (03) multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\delta\equiv 0$; (11) multitudinem solutionum congruentiae $1+\beta+\beta'\equiv 0$ etc., exprimendo indefinite per β et β' numeros e complexu B, per γ numeros e complexu C, per δ numeros e complexu D. Hinc statim colligimus sex aequationes sequentes:

(01)=(10), (02)=(20), (03)=(30), (12)=(21), (13)=(31), (23)=(32).

E quauis solutione data congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$ demanat solutio congruentiae $1+\delta+\delta'\equiv 0$, accipiendo pro δ numerum inter limites $1\ldots.p-1$ eum qui reddit $\beta\delta\equiv 1$ (qui manifesto erit e complexu D), et pro δ' residuum minimum positivum producti $\alpha\delta$ (quod itidem erit e complexu D); perinde patet regressus a solutione data congruentiae $1+\delta+\delta'\equiv 0$ ad solutionem congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$, si β accipitur ita, vt fiat $\beta\delta\equiv 1$, simulque statuitur $\alpha\equiv\beta\delta'$. Hinc concludimus, vtramque congruentiam aequali solutionum multitudine gaudere, siue esse (01) = (33).

Simili modo e congruentia $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ deducimus $\gamma'+\gamma''+1\equiv 0$, si γ' accipitur e complexu C ita vt fiat $\gamma\gamma'\equiv 1$, atque γ'' ex eodem complexu congruus producto $\alpha\gamma'$. Vnde facile colligimus, has duas congruentias aequalem solutionum multitudinem admittere, siue esse $(02)=(22)$.

Perinde e congruentia $1+\alpha+\delta\equiv 0$ deducimus $\beta+\beta'+1\equiv 0$, accipiendo β, β' ita vt fiat $\beta\delta\equiv 1$, $\beta\alpha\equiv\beta'$, eritque adeo $(03)=(11)$.

Denique e congruentia $1+\beta+\gamma\equiv 0$ simili modo tum congruentiam $\delta+1+\beta'\equiv 0$, tum hanc $\gamma'+\delta'+1\equiv 0$ deriuamus, atque hinc concludimus $(12)=(13)=(23)$.

Nacti sumus itaque, inter sedecim incognitas nostras, vndecim aequationes, ita vt illae ad quinque reducantur, schemaque S ita exhiberi possit:

$$\begin{array}{llll} h, & i, & k, & l \\ i, & l, & m, & m \\ k, & m, & k, & m \\ l, & m, & m, & i \end{array}$$

Facile vero tres nouae aequationes conditionales adiiciuntur. Quum enim quemuis numerum complexus A, excepto vltimo $p-1$, sequi debeat numerus ex aliquo complexuum A, B, C vel D, habebimus

$$(00)+(01)+(02)+(03)=2n-1$$

et perinde

$$(10)+(11)+(12)+(13)=2n$$
$$(20)+(21)+(22)+(23)=2n$$
$$(30)+(31)+(32)+(33)=2n$$

In signis modo introductis tres primae aequationes suppeditant:

$$h+i+k+l=2n-1$$
$$i+l+2m=2n$$
$$k+m=n$$

Quarta cum secunda fit identica. Adiumento harum aequationum tres incognitarum eliminare licet, quo pacto omnes sedecim iam ad duas reductae sunt.

17.

Vt vero determinationem completam nanciscamur, inuestigare conueniet multitudinem solutionum congruentiae

$$1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0 \pmod{p}$$

designantibus α, β, γ indefinite numeros e complexibus A, B, C. Manifesto valor $\alpha = p-1$ non est admissibilis, quum fieri nequeat $\beta+\gamma\equiv 0$: substituendo itaque pro α deinceps valores reliquos, prodibunt h, i, k, l valores ipsius $1+\alpha$ ad A, B, C, D resp. pertinentes. Pro quouis autem valore *dato* ipsius $1+\alpha$ ad A pertinente, puta pro $1+\alpha=\alpha^\circ$, congruentia $\alpha^\circ+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem solutiones admittet, quot congruentia $1+\beta'+\gamma'\equiv 0$ (statuendo scilicet $\beta\equiv\alpha^\circ\beta'$, $\gamma\equiv\alpha^\circ\gamma'$), i. e. solutiones $(12)=m$. Perinde pro quouis valore dato ipsius $1+\alpha$ ad B pertinente, puta pro $1+\alpha=\beta^\circ$, congruentia $\beta^\circ+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem solutiones habebit, quot haec $1+\alpha'+\beta'\equiv 0$ (scilicet statuendo $\beta\equiv\beta^\circ\alpha'$, $\gamma\equiv\beta^\circ\beta'$), i. e. solutiones $(01)=i$. Similiter pro quolibet valore dato ipsius $1+\alpha$ ad C pertinente, puta pro $1+\alpha=\gamma^\circ$, congruentia $\gamma^\circ+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem modis diuersis solui poterit, quot haec $1+\delta+\alpha'\equiv 0$ (nempe statuendo $\beta\equiv\gamma^\circ\delta$, $\gamma\equiv\gamma^\circ\alpha'$), i. e. solutionum multitudo erit $(03)=l$. Denique pro quouis valore dato ipsius $1+\alpha$ ad D pertinente, puta pro $1+\alpha=\delta^\circ$, congruentia $\delta^\circ+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem solutiones habebit, quot haec $1+\gamma'+\delta'\equiv 0$ (statuendo $\beta\equiv\delta^\circ\gamma'$, $\gamma\equiv\delta^\circ\delta'$), i. e. $(23)=m$ solutiones. Omnibus itaque collectis, patet, congruentiam $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$ admittere

$$hm+ii+kl+lm$$

solutiones diuersas.

Prorsus vero simili modo eruimus, si pro β singuli deinceps numeri complexus B substituantur, summam $1+\beta$ obtinere resp. (10), (11), (12), (13) siue i, l, m, m valores ad A, B, C, D pertinentes, et pro quouis valore *dato* ipsius $1+\beta$ ad hos complexus pertinente, congruentiam $1+\beta+\alpha+\gamma\equiv 0$ resp. (02), (31), (20), (13) siue k, m, k, m solutiones diuersas admittere, ita vt multitudo omnium solutionum fiat

$$= ik + lm + km + mm$$

Ad eundem valorem perducimur, si euolutionem considerationi valorum summae $1+\gamma$ superstruimus.

18.

Ex hac duplici eiusdem multitudinis expressione nanciscimur aequationem:

$$0 = hm + ii + kl - ik - km - mm$$

atque hinc, eliminando h adiumento aequationis $h = 2m - k - 1$,

$$0 = (k-m)^2 + ii + kl - ik - kk - m$$

Sed duae aequationes vltimae art. 16 suppeditant $k = \frac{1}{2}(l+i)$, quo valore substituto $ii + kl - ik - kk$ transit in $\frac{1}{4}(l-i)^2$, adeoque aequatio praecedens, per 4 multiplicata, in hanc

$$0 = 4(k-m)^2 + (l-i)^2 - 4m$$

Hinc, quoniam $4m = 2(k+m) - 2(k-m) = 2n - 2(k-m)$, sequitur

$$2n = 4(k-m)^2 + 2(k-m) + (l-i)^2$$

siue

$$8n+1 = (4(k-m)+1)^2 + 4(l-i)^2$$

Statuendo itaque

$$4(k-m) + 1 = a,\ 2l - 2i = b$$

habebimus

$$p = aa + bb$$

Sed constat, p vnico tantum modo in duo quadrata discerpi posse, quorum alterum impar accipi debet pro aa, alterum par pro bb, ita vt aa, bb sint numeri ex asse determinati. Sed etiam a ipse erit numerus prorsus determinatus; radix enim quadrati positiue accipi debet, vel negatiue, prout radix positiua est formae $4M+1$ vel $4M+3$. De determinatione signi ipsius b mox loquemur.

Iam combinatis his nouis aequationibus cum tribus vltimis art. 16, quinque numeri h, i, k, l, m per a, b et n penitus determinantur sequenti modo:

$$\begin{aligned}
8h &= 4n - 3a - 5\\
8i &= 4n + a - 2b - 1\\
8k &= 4n + a - 1\\
8l &= 4n + a + 2b - 1\\
8m &= 4n - a + 1
\end{aligned}$$

Si loco ipsius n modulum p introducere malumus, schema S, singulis terminis ad euitandas fractiones per 16 multiplicatis, ita se habet:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
p-6a-11 & p+2a-4b-3 & p+2a-3 & p+2a+4b-3\\
p+2a-4b-3 & p+2a+4b-3 & p-2a+1 & p-2a+1\\
p+2a-3 & p-2a+1 & p+2a-3 & p-2a+1\\
p+2a+4b-3 & p-2a+1 & p-2a+1 & p+2a-4b-3
\end{array}$$

19.

Superest, vt signum ipsi b tribuendum assignare doceamus. Iam supra, art. 10, monuimus, distinctionem inter complexus B et D, per se non essentialem, ab electione numeri f pendere, pro quo alterutra radix congruentiae $xx \equiv -1$ accipi debet, illasque inter se permutari, si loco alterius radicis altera adoptetur. Iam quum inspectio schematis modo allati doceat, similem permutationem cum mutatione signi ipsius b cohaerere, praeuidere licet, nexum inter signum ipsius b atque numerum f exstare debere. Quem vt cognoscamus, ante omnia obseruamus, si, denotante μ integrum non negatiuum, pro z accipiantur omnes numeri $1, 2, 3 \ldots . p-1$, fieri secundum modulum p, vel $\Sigma z^{\mu} \equiv 0$, vel

$\Sigma z^\mu \equiv -1$, prout μ vel non-diuisibilis sit per $p-1$, vel diuisibilis. Pars posterior theorematis inde patet, quod pro valore ipsius μ per $p-1$ diuisibili, habetur $z^\mu \equiv 1$: partem priorem vero ita demonstramus. Denotante g radicem primitiuam, omnes z conuenient cum residuis minimis omnium g^γ, accipiendo pro γ omnes numeros $0, 1, 2, 3 \ldots . p-2$, eritque adeo $\Sigma z^\mu \equiv \Sigma g^{\mu\gamma}$. Sed fit

$$\Sigma g^{\mu\gamma} = \frac{g^{\mu(p-1)}-1}{g^\mu - 1}, \text{ adeoque}$$

$$(g^\mu - 1)\, \Sigma z^\mu \equiv g^{\mu(p-1)} - 1 \equiv 0.$$

Hinc vero sequitur, quoniam pro valore ipsius μ per $p-1$ nondiuisibili g^μ ipsi 1 congruus siue $g^\mu - 1$ per p diuisibilis esse nequit, $\Sigma z^\mu \equiv 0$. *Q. E. D.*

Iam si potestas $(z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum theorema binomiale euoluitur, per lemma praec. fiet

$$\Sigma (z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -2 \text{ (mod. } p)$$

Sed residua minima omnium z^4 exhibent omnes numeros A, quovis quater occurrente; habebimus itaque inter residua minima ipsius z^4+1

4(00) ad A
4(01) ad B
4(02) ad C
4(03) ad D

pertinentia, quatuorque erunt $= 0$ (puta pro $z^4 \equiv p-1$). Hinc, considerando criteria complexuum A, B, C, D, deducimus

$$\Sigma (z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv 4(00) + 4f(01) - 4(02) - 4f(03)$$

adeoque

$$-2 \equiv 4(00) + 4f(01) - 4(02) - 4f(03)$$

siue substitutis pro (00), (01) etc. valoribus in art. praec. inuentis,

$$-2 \equiv -2a - 2 - 2bf$$

Hinc itaque colligimus, semper fieri debere $a + bf \equiv 0$, siue, multiplicando per f,

$$b \equiv af$$

quae congruentia determinationi signi ipsius b, si numerus f iam electus est, vel determinationi numeri f, si signum ipsius b aliunde praescribitur, inseruit.

20.

Postquam problema nostrum pro modulis formae $8n+1$ complete soluimus, progredimur ad casum alterum, vbi p est formae $8n+5$: quem eo breuius absoluere licebit, quod omnia ratiocinia parum a praecedentibus differunt.

Quum pro tali modulo -1 ad classem C pertineat, complementa numerorum complexuum A, B, C, D ad summam p, in classibus C, D, A, B resp. contenta erunt. Hinc facile colligitur

signum	denotare multitudinem solutionum congruentiae
(00)	$1+\alpha+\gamma\equiv 0$
(01)	$1+\alpha+\delta\equiv 0$
(02)	$1+\alpha+\alpha'\equiv 0$
(03)	$1+\alpha+\beta\equiv 0$
(10)	$1+\beta+\gamma\equiv 0$
(11)	$1+\beta+\delta\equiv 0$
(12)	$1+\beta+\alpha\equiv 0$
(13)	$1+\beta+\beta'\equiv 0$
(20)	$1+\gamma+\gamma'\equiv 0$
(21)	$1+\gamma+\delta\equiv 0$
(22)	$1+\gamma+\alpha\equiv 0$
(23)	$1+\gamma+\beta\equiv 0$
(30)	$1+\delta+\gamma\equiv 0$
(31)	$1+\delta+\delta'\equiv 0$
(32)	$1+\delta+\alpha\equiv 0$
(33)	$1+\delta+\beta\equiv 0$.

vnde statim habentur sex aequationes:

$(00) = (22)$, $(01) = (32)$, $(03) = (12)$, $(10) = (23)$, $(11) = (33)$, $(21) = (30)$.

Multiplicando congruentiam $1 + \alpha + \gamma \equiv 0$ per numerum γ' e complexu C ita electum, vt fiat $\gamma\gamma' \equiv 1$, accipiendoque pro γ'' residuum minimum producti $\alpha\gamma'$, quod manifesto quoque complexui C adnumerandum erit, prodit $\gamma' + \gamma'' + 1 \equiv 0$, vnde colligimus $(00) = (20)$.

Prorsus simili modo habentur aequationes $(01) = (13)$, $(03) = (31)$, $(10) = (11) = (21)$.

Adiumento harum vndecim aequationum sedecim incognitas nostras ad quinque reducere, schemaque S ita exhibere possumus:

$$\begin{array}{llll} h, & i, & k, & l \\ m, & m, & l, & i \\ k, & m, & h, & m \\ m, & l, & i, & m \end{array}$$

Porro habemus aequationes

$$\begin{aligned} (00) + (01) + (02) + (03) &= 2n+1 \\ (10) + (11) + (12) + (13) &= 2n+1 \\ (20) + (21) + (22) + (23) &= 2n \\ (30) + (31) + (32) + (33) &= 2n+1 \end{aligned}$$

siue, adhibendo signa modo introducta, has tres (I):

$$\begin{aligned} h + i + k + l &= 2n+1 \\ 2m + i + l &= 2n+1 \\ h + m &= n \end{aligned}$$

quarum itaque adiumento incognitas nostras iam ad duas reducere licet.

Aequationes reliquas e consideratione multitudinis solutionum congruentiae $1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0$ deriuabimus (per α, β, γ, etiam hic indefinite numeros e complexibus A, B, C resp. denotantes). Scilicet perpendendo primo, $1+\alpha$ praebere h, i, k, l numeros resp. ad A, B, C, D pertinentes, et pro quouis valore dato ipsius α in his quatuor casibus resp. haberi solutiones m, l, i, m, multitudo omnium solutionum erit

$$= hm + il + ik + lm$$

Secundo quum $1+\beta$ exhibeat m, m, l, i numeros ad A, B, C, D pertinentes, et pro quouis valore *dato* ipsius β in his quatuor casibus exstent solutiones h, m, h, m, multitudo omnium solutionum erit

$$= hm + mm + hl + im$$

vnde deriuamus aequationem

$$0 = mm + hl + im - il - ik - lm$$

quae adiumento aequationis $k = 2m - h$, ex (I) petitae, transit in hanc:

$$0 = mm + hl + hi - il - im - lm$$

Iam ex aequationibus I habemus etiam $l + i = 1 + 2h$, vnde

$$2i = 1 + 2h + (i - l)$$
$$2l = 1 + 2h - (i - l)$$

Quibus valoribus in aequatione praecedente substitutis, prodit:

$$0 = 4mm - 4m - 1 - 8hm + 4hh + (i - l)^2$$

Quodsi tandem pro $4m$ hic substituimus $2(h+m) - 2(h-m)$ siue, propter aequationem vltimam in I, $2n - 2(h-m)$, obtinemus:

$$0 = 4(h-m)^2 - 2n + 2(h-m) - 1 + (i-l)^2.$$

adeoque

$$8n + 5 = (4(h-m)+1)^2 + 4(i-l)^2$$

Statuendo itaque

$$4(h-m) + 1 = a,\ 2i - 2l = b$$

fiet

$$p = aa + bb.$$

Iam quum in hoc quoque casu p vnico tantum modo in duo quadrata, par alterum, alterum impar, discerpi possit, aa et bb erunt numeri prorsus determinati; manifesto enim aa quadrato impari, bb pari aequalis statui debet. Praeterea *signum* ipsius a ita erit stabiliendum, vt fiat $a \equiv 1$ (mod. 4), signumque ipsius b ita, vt habeatur $b \equiv af$ (mod. p), vti per ratiocinia iis quibus in art. praec. vsi sumus prorsus similia facile demonstratur.

His praemissis quinque numeri h, i, k, l, m per a, b et n ita determinantur:

$$8h = 4n + a - 1$$
$$8i = 4n + a + 2b + 3$$
$$8k = 4n - 3a + 3$$
$$8l = 4n + a - 2b + 3$$
$$8m = 4n - a + 1$$

aut si expressiones per p praeferimus, termini schematis S per 16 multiplicati ita se habebunt:

$p+2a-7$	$p+2a+4b+1$	$p-6a+1$	$p+2a-4b+1$
$p-2a-3$	$p-2a-3$	$p+2a-4b+1$	$p+2a+4b+1$
$p+2a-7$	$p-2a-3$	$p+2a-7$	$p-2a-3$
$p-2a-3$	$p+2a-4b+1$	$p+2a+4b+1$	$p-2a-3$

21.

Postquam problema nostrum soluimus, ad disquisitionem principalem reuertimur, determinationem completam complexus, ad quem numerus 2 pertinet, iam aggressuri.

I. Quoties p est formae $8n+1$, iam constat, numerum 2 vel in complexu A vel in complexu C inueniri. In casu priori facile perspicitur, etiam numeros $\frac{1}{2}(p-1)$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad A pertinere, in posteriori vero ad C. Iam perpendamus, si α et $\alpha+1$ sint numeri contigui complexus A, etiam $p-\alpha-1$, $p-\alpha$ tales numeros esse, siue, quod idem est, numeros complexus A tales, quos sequatur numerus ex eodem complexu, binos semper associatos esse, (α et $p-1-\alpha$). Talium itaque numerorum multitudo, (00), semper erit par, nisi quis exstat sibi ipse associatus, i. e. nisi $\frac{1}{2}(p-1)$ ad A pertinet, in quo casu multitudo illa impar erit. Hinc colligimus, (00) imparem esse, quoties 2 ad complexum A, parem vero, quoties 2 ad C pertineat. Sed habemus

$$16(00) = aa + bb - 6a - 11$$

siue statuendo $a = 4q + 1$, $b = 4r$ (v. art. 14),

$$(00) = qq - q + rr - 1$$

Quoniam igitur $qq - q$ manifesto semper par est, (00) impar erit vel par, prout r par est vel impar, adeoque 2 vel ad A vel ad C pertinebit, prout b est vel formae $8m$ vel formae $8m+4$. Quod est ipsum theorema, in art. 14 per inductionem inuentum.

II. Sed etiam casum alterum, vbi p est formae $8n+5$, aeque complete absoluere licet. Numerus 2 hic vel ad B, vel ad D pertinet, perspiciturque facile, in casu priori $\frac{1}{2}(p-1)$ ad B, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad D, in casu posteriori autem $\frac{1}{2}(p-1)$ ad D, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad B pertinere. Iam perpendamus, si β sit numerus ex B talis, quem sequatur numerus ex D, fore etiam numerum $p-\beta-1$ ex B atque $p-\beta$ ex D, i. e. numeros illius proprietatis binos associatos semper adesse. Erit itaque illorum multitudo, (13), par, excepto casu, in quo vnus eorum sibi ipse associatus est, i. e. vbi $\frac{1}{2}(p-1)$ ad B, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad D pertinet; tunc scilicet (13) impar erit. Hinc colligimus, (13) parem esse, quoties 2 ad D, imparem vero, quoties 2 ad B pertineat. Sed habemus

$$16(13) = aa + bb + 2a + 4b + 1$$

siue statuendo $a = 4q + 1$, $b = 4r + 2$,

$$(13) = qq + q + rr + 2r + 1$$

Erit itaque (13) impar, quoties r par est; contra (13) par erit, quoties r est impar: vnde colligimus, 2 pertinere ad B, quoties b sit formae $8m + 2$, ad D vero, quoties b sit formae $8m + 6$.

Summa harum inuestigationum ita enunciari potest:

Numerus 2 pertinet ad complexum A, B, C vel D, prout numerus $\frac{1}{2}b$ est formae $4m$, $4m+1$, $4m+2$ vel $4m+3$.

22.

In Disquisitionibus Arithmeticis theoriam generalem diuisionis circuli, atque solutionis aequationis $x^p - 1 = 0$ explicauimus, interque alia docuimus, si μ sit diuisor numeri $p - 1$, functionem $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ in μ factores ordinis $\frac{p - 1}{\mu}$ resolui posse adiumento aequationis auxiliaris ordinis μ. Praeter theoriam generalem huius resolutionis simul casus speciales, vbi $\mu = 2$ vel $\mu = 3$, in illo opere p. 356-358 seorsim considerauimus, aequationemque auxiliarem a priori assignare docuimus, i. e. absque euolutione schematis residuorum minimorum potestatum alicuius radicis primitiuae pro modulo p. Iam vel nobis non monentibus lectores attenti facile percipient nexum arctissimum casus proximi istius theoriae, puta pro $\mu = 4$, cum inuestigationibus hic in artt. 15-20 explicatis, quarum adiumento ille quoque sine difficultate complete absolui poterit. Sed hanc tractationem ad aliam occasionem nobis reseruamus, ideoque etiam in commentatione praesente disquisitionem in forma pure arithmetica perficere maluimus, theoria aequationis $x^p - 1 = 0$ nullo modo immixta. Contra coronidis loco adhuc quaedam alia theoremata noua pure arithmetica, cum argumento hactenus pertractato arctissime coniuncta, adiiciemus.

23.

Si potestas $(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ secundum theorema binomiale euoluitur, tres termini aderunt, in quibus exponens ipsius x per $p - 1$ diuisibilis est, puta

$$x^{2(p-1)},\quad Px^{(p-1)} \text{ atque } 1$$

denotando per P coëfficientem medium

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{1}{2}(p-3)\cdot\frac{1}{2}(p-5)\ldots\ldots\frac{1}{4}(p+3)}{1\quad .\quad 2\quad .\quad 3\quad \ldots\ldots\frac{1}{4}(p-1)}$$

Substituendo itaque pro x deinceps numeros $1, 2, 3 \ldots\ldots p - 1$, obtinebimus per lemma art. 19

$$\Sigma\,(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -2 - P.$$

At perpendendo ea quae in art. 19 exposuimus, insuperque, quod numeri complexuum A, B, C, D, ad potestatem exponentis $\frac{1}{2}(p-1)$ euecti congrui sunt, secundum modulum p, numeris $+1, -1, +1, -1$ resp., facile intelligitur fieri

$$\Sigma\,(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 4(00) - 4(01) + 4(02) - 4(03)$$

adeoque per schemata in fine artt. 17, 19 tradita

$$\Sigma\,(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -2a - 2$$

Comparatio horum duorum valorum suppeditat elegantissimum theorema: scilicet habemus

$$P \equiv 2a \pmod{p},$$

Denotando quatuor producta

$$1, 2, 3 \ldots\ldots \tfrac{1}{4}(p-1)$$
$$\tfrac{1}{4}(p+3)\cdot\tfrac{1}{4}(p+7)\cdot\tfrac{1}{4}(p+11)\ldots\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)$$
$$\tfrac{1}{2}(p+1)\cdot\tfrac{1}{2}(p+3)\cdot\tfrac{1}{2}(p+5)\ldots\ldots\tfrac{3}{4}(p-1)$$
$$\tfrac{1}{4}(3p+1)\cdot\tfrac{1}{4}(3p+5)\cdot\tfrac{1}{4}(3p+9)\ldots\ldots(p-1)$$

resp. per q, r, s, t, theorema praecedens ita exhibetur:

$$2a \equiv \frac{r}{q} \pmod{p}$$

Quum quilibet factorum ipsius q complementum suum ad p habeat in t, erit $q \equiv t \pmod{p}$, quoties multitudo factorum par est, i. e. quoties p est formae $8n+1$, contra $q \equiv -t$, quoties multitudo factorum impar est, siue p formae $8n+5$. Perinde in casu priori erit $r \equiv s$, in posteriori $r \equiv -s$. In vtroque casu erit $qr \equiv st$, et quum constet, haberi $qrst \equiv -1$, erit $qqrr \equiv -1$, adeoque $qr \equiv \pm f \pmod{p}$. Combinando hanc congruentiam cum theoremate modo inuento obtinemus $rr \equiv \pm 2af$, et proin, per artt. 19. 20

$$2b \equiv \pm rr \pmod{p}$$

Valde memorabile est, discerptionem numeri p in duo quadrata per operationes prorsus directas inueniri posse; scilicet radix quadrati imparis erit residuum absolute minimum ipsius $\frac{r}{2q}$, radix quadrati paris vero residuum absolute minimum ipsius $\frac{1}{2}rr$ secundum modulum p. Expressionem $\frac{r}{2q}$, cuius valor pro $p=5$ fit $=1$, pro valoribus maioribus ipsius p, ita quoque exhibere licet:

$$\frac{6.\ 10.\ 14.\ 18\ \ldots\ldots\ (p-3)}{2.\ 3.\ 4\ \ 5.\ \ldots\ldots\ \frac{1}{4}(p-1)}$$

Sed quum insuper nouerimus, quonam signo affecta prodeat ex hac formula radix quadrati imparis, eo scilicet, vt semper fiat formae $4m+1$, attentione perdignum est, quod simile criterium generale respectu signi radicis quadrati paris hactenus inueniri non potuerit. Quale si quis inueniat, et nobiscum communicet, magnam de nobis gratiam feret. Interim hic adiungere visum est valores numerorum a, b, f, quales pro valoribus ipsius p infra 200 e residuis minimis expressionum $\frac{r}{2q}$, $\frac{1}{2}rr$, qr prodeunt.

p	a	b	f
5	+ 1	+ 2	2
13	− 3	− 2	5
17	+ 1	− 4	13
29	+ 5	+ 2	12
37	+ 1	− 6	31
41	+ 5	+ 4	9
53	− 7	− 2	23
61	+ 5	− 6	11
73	− 3	− 8	27
89	+ 5	− 8	34
97	+ 9	+ 4	22
101	+ 1	− 10	91
109	− 3	+ 10	33
113	− 7	+ 8	15
137	− 11	+ 4	37
149	− 7	− 10	44
157	− 11	− 6	129
173	+ 13	+ 2	80
181	+ 9	+ 10	162
193	− 7	+ 12	81
197	+ 1	− 14	183